§1.3 オイラーの公式

まず、実関数のテイラー展開を思い出す

"$x=0$ のまわりで展開"

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots$$

例

$f(x) = e^x$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

$f(x) = \cos x$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

$f(x) = \sin x$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

"指数関数と三角関数は実関数のレベルでは無関係であるが、複素関数に拡張するとつながりが見えてくる"

形式的に、$f(x) = e^x$ の展開式に、

$x = i\theta \ (\theta \in \mathbb{R})$ を代入する。

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \cdots$$

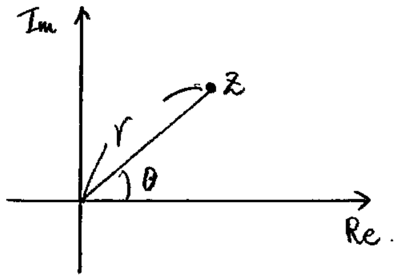
$$= \underbrace{\left\{1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \cdots\right\}}_{\cos\theta} + i\underbrace{\left\{\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots\right\}}_{\sin\theta}.$$

"三角関数と指数関数が複素領域でつながる"

ゆえに
$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$
オイラーの公式

オイラーの公式から導かれるもの

(1) 極座標表示 (簡単になる)



「z を (r, θ) で指定する
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= re^{i\theta}$ 」

(問)
(1) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ を示せ

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ とおく

$\rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\overline{z_1 z_2} = r_1 r_2 e^{-i(\theta_1+\theta_2)}$

$= r_1 e^{-i\theta_1} r_2 e^{-i\theta_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(2) 幾何学的意味

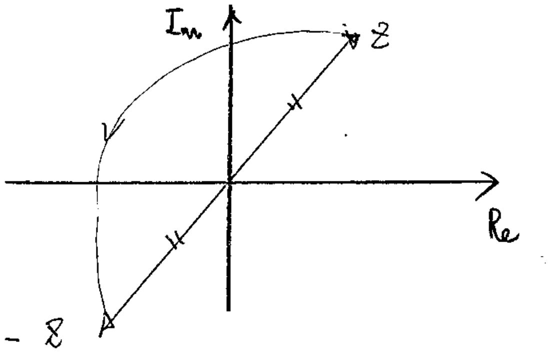
「$\cos\theta + i\sin\theta$ をかける = θ 回転」

$\Leftrightarrow$

「$e^{i\theta}$ をかける = θ 回転」

特に、「$e^{i\pi}$ をかける = 180° 回転」

一方 $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ の右辺の "-1" は、「折り返し」



$$\boxed{\begin{array}{c} e^{i\pi} = -1 \\ 180°\text{回転} = \text{折り返し.} \end{array}}$$

(3) ド・モアブルの公式

$x^3-2x^2+3=0$

実方程式を解く → $\mathbb{C}$版

$e^{i\theta}$ の θ に、$n\theta$ を代入する。 (nは整数)

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

一方、

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = \left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n$$

ゆえに

$$\boxed{(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

(問) $z^3=1$ の解をもとめよ。

$z^3=1$ の共役 $\bar{z}^3=1$

$\therefore\ z^3\cdot\bar{z}^3=1$

一方、 $z\bar{z}=|z|^2$

$|z|^6=1$ $|z|=1$

ゆえに $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおける。

$$z^3=1 \iff (\cos\theta+i\sin\theta)^3=1$$

$$\iff \cos3\theta+i\sin3\theta=1+i0$$

$$\begin{cases}\cos3\theta=1\\ \sin3\theta=0\end{cases}$$

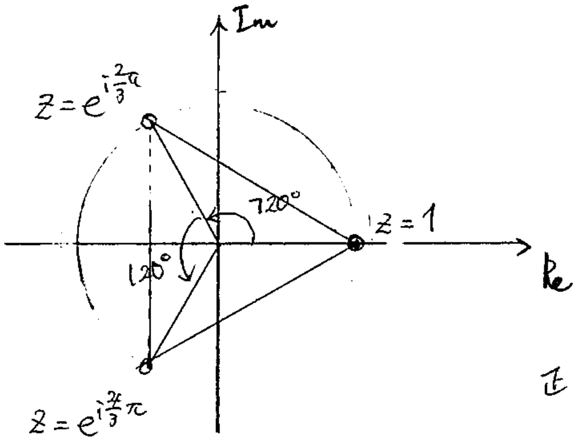
"一本の複素方程式は、2本の実方程式になっている"

$3\theta=0,\ 2\pi,\ 4\pi.$

$\theta=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$

$z=1,\ e^{i\frac{2}{3}\pi},\ e^{i\frac{4}{3}\pi}$

図形的意味.



正三角形　　"$z^n=1$ の解は、正 n 角形の頂点"

とくに、$z^3=1$

3回転すると元に戻る、と解釈できる.

問(自習)

(1) $z^4=1$

(2) $z^4=-1$　　← 頂点の向きが変わる.

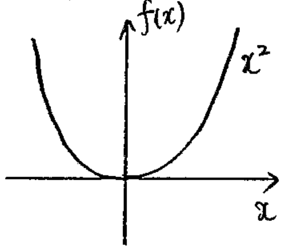
§2. 複素関数

微分, 正則性

$f(x) \to f(z)$ にすると??

例 $f(z) = z^2$

(復習) $f(x) = x^2$



← こんな風に $f(z)$ をかけない

$z = x + iy$ と, 2つの(実)変数 x, y を用いて, $f(z)$ を表す.

すると, $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

$$= \underbrace{x^2 - y^2}_{\mathrm{Re}\, f(z)} + i\underbrace{(2xy)}_{\mathrm{Im}\, f(z)}$$

→ あらゆる $f(z)$ は, 2つの 実2変数関数

$u(x,y)$, $v(x,y)$

を用いて $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ とかける.

ここで, 疑問が生じる.

→ 複素関数論 $\overset{?}{=}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$, 2変数関数論　　答えは No.

← 正則性の概念が無い

今回、実関数との違いについて紹介.

$f(x) = \sin x$ について、 $|\sin x| \leq 1$.

$\Rightarrow$ $f(z) = \sin z$ について、 $|\sin z| \leq$??

▷ 三角関数、指数関数

→ テイラー展開で定義

$$e^z \triangleq 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

同様に.

$$\sin z \triangleq z - \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\cdots$$

$$\cos z \triangleq 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{z^4}{4!} + \cdots$$

§1.3と同様に.

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{iz} = \cos z + i\sin z \\ \text{但し、今は、} i \text{も} z \text{も} \mathbb{C} \\ e^{-iz} = \cos z - i\sin z \end{array}}$$

"これもオイラーの公式"

すると、

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

← z を x にしても成り立つ.

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

これらを利用して、

$$\sin z = u + iv$$

を求める。

問 e^z, $\sin z$ について、$u(x,y)$, $v(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(z) = e^z$

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$= \underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

(2)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$= \frac{1}{2i}\left\{ e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} \right\}$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} e^{y} \right)$$

$\cos x \pm i\sin x$

$$= \underbrace{\frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x}_{v(x,y)}.$$

問 $|\sin z|$ を求めよ.

$$|\sin z|^2 = u^2 + v^2$$
$$= \sin^2 x + \underbrace{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2}_{\geqq 0}$$

例 $|\sin(1+i)|^2 = \sin^2 1 + \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2}\right)^2.$

次回は、$f'(z)$ を扱う.