

▷ C-R 関係式の書きかえ.

$f$  を,  $z$  と  $\bar{z}$  の関数とみても可.

$$z^2, |z|^2 = z\bar{z}$$

↑                    ↑  
微分可                不可

$\bar{z}$  があると問題が起きるので

$x, y \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\left. \begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned} \right\} z \text{ を定義する}$$

このとき,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z, \bar{z})$  を計算してみよう.

$$\hookrightarrow = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

∴  $f$  が微分可能であれば可.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

$$= 0$$

ゆえに,  $f$  が微分可能であれば

$$\frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0$$

$\Leftrightarrow f$  が  $\bar{z}$  に依存しない.  $\bar{z} \in \mathbb{C}$  含む必要なければ微分可能

ゆえに, 微分可能な  $f$  は多く存在する.

例)

$f(z) = z^2 + z + 1$  は すべて  $\mathbb{C}$  で微分可能

例)

$f(z) = e^z$  は "

$$\begin{aligned} \sin z \\ \cos z \end{aligned}$$

例.  $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$

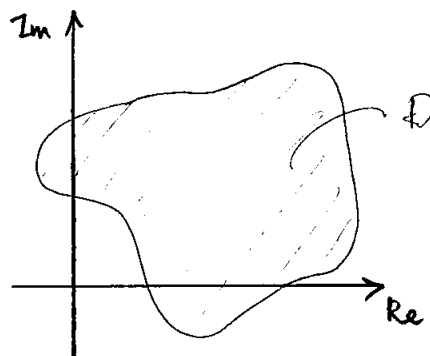
$z = \pm i$  を除いて微分可能.

↳ 特異点

▷ 正則性

$f(z)$  が領域  $D$  のすべての点で

微分可能であるとき、 $f$  は  $D$  で 正則

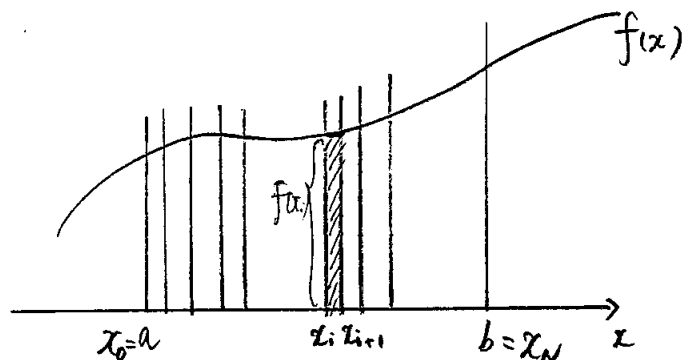


### 5.3. 複素積分

③

実関数  $f(x)$  の場合.

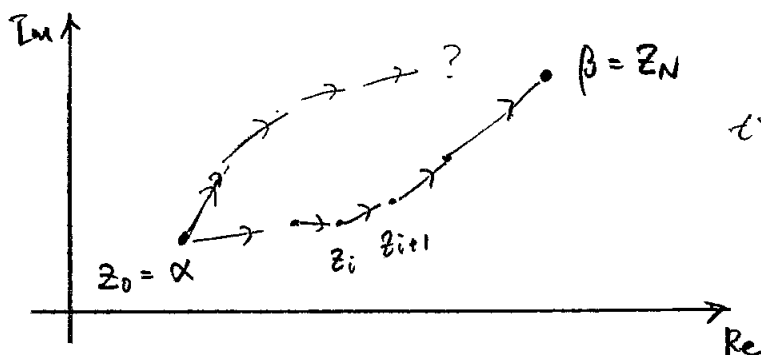
$$\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$



複素関数の場合 (?)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = \lim \sum_i f(z_i)(z_{i+1} - z_i)$$

↑ 複素数  $\mathbb{C}$



このように点列を発生させた?  
(経路)

↓  
うまいかな!

## ▷ 定義

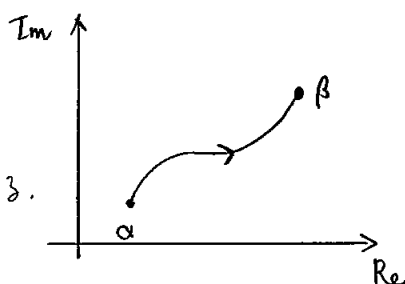
←  $C$  は与えられている.

複素積分

経路  $C$  の上で  $f(z)$  を積分.

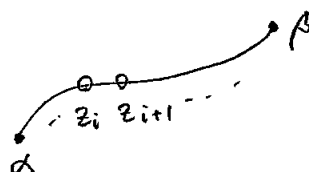
$$\int_C f(z) dz$$

向きも含めて与えられている.



$$\int_C f(z) dz$$

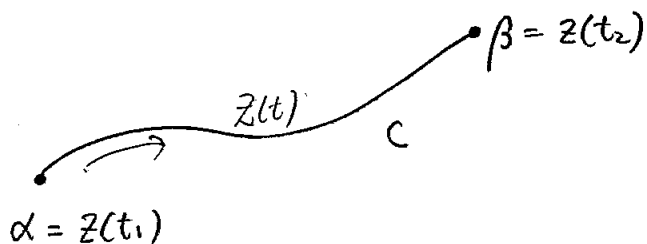
$$= \lim \sum_i f(z_i) (z_{i+1} - z_i)$$

 $C$  が与えられれば、分点は一意に決まる.

## ▷ 計算法

 $C$  が与えられている $\Downarrow$  $C$  上を動く点  $z$  の動き方が 1つのパラメータ で指定できる $\Downarrow$ つまり  $z(t)$ 

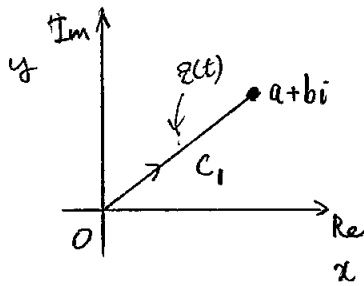
$$t: t_1 \rightarrow t_2$$

 $z(t)$  が与えられている

つまり

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} \cdot dt$$

← 2つを乗ると普通の積分

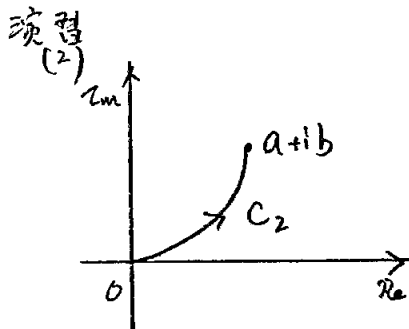
問 (1)  $f(z) = z$  $C_1$  上の点  $z(t) = x(t) + iy(t)$ 

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt \end{cases} \quad (t: 0 \rightarrow 1)$$

実際  $z(t) = at + ibt$ 

$$z(0) = 0, \quad z(1) = a + bi$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{C_1} z dz = \int_0^1 \underbrace{(at + ibt)}_{f(z)} \underbrace{(a + ib)}_{\frac{dz(t)}{dt}} dt \\ &= (a + ib)^2 \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2} (a + ib)^2 \end{aligned}$$

 $C_2$  上の点  $z(t) = x(t) + iy(t)$ 

$$\begin{cases} x(t) = at \\ y(t) = bt^2 \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 1 \text{ かつ}$$

$$z(0) = 0, \quad z(1) = a + ib$$

$$z(t) = at + ibt^2$$

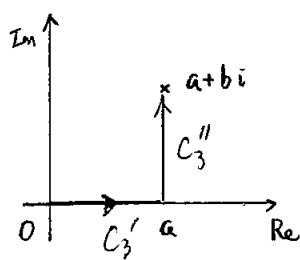
$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^1 (at + ibt^2)(a + 2ibt) dt \\ &= \frac{1}{2} (a + ib)^2 \end{aligned}$$

注1) パラメータの取り方は各自異なる

$$\text{たとえば, 問(1) (1)} \quad x(t) = \frac{at^2}{4}, \quad y(t) = \frac{bt^2}{4} \quad t(0 \rightarrow 2) \text{ とおく。}$$

注2)  $C$  は  $C_1$  と  $C_2$  の連結 区間 である。

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$



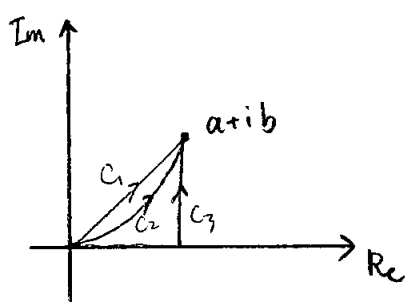
$$\int_{C_3} z dz = \int_{C_3'} z dz + \int_{C_3''} z dz$$

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{2} (a+ib)^2$$

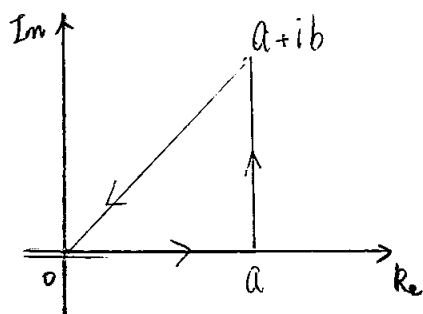
わかること

$$\int_{C_1} z dz = \int_{C_2} z dz = \int_{C_3} z dz$$



始点と終点のみ依存し、経路依存しない  
(ただし  $f(z)$  が正則なとき)。

つまり、右図の 閉じた経路 に対して積分すると 0

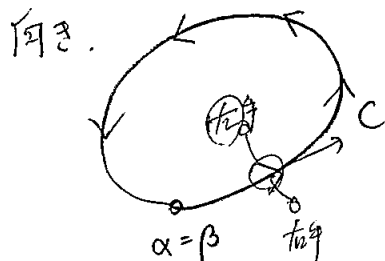


周回積分

# ▷ 周回積分

~ 閉曲線経路上での積分

↪  $C: z(t) : (t: t_1 \rightarrow t_2)$  について,  
 $z(t_1) = z(t_2)$  でありその.



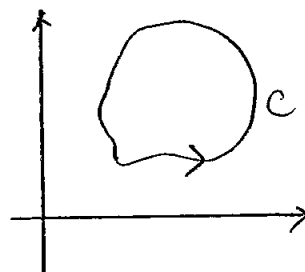
反時計回り. (左手向き)

左手が経路の内側に入る.

このように積分を

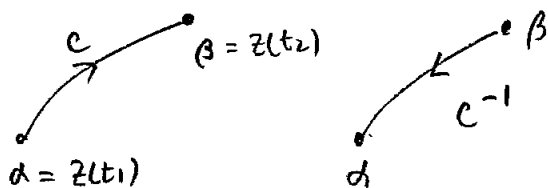
$$\oint_C f(z) dz$$

これを周回積分



## ▷ 便利な記号

経路  $C$  に沿って逆時計の経路  $C^{-1}$  を次で定義



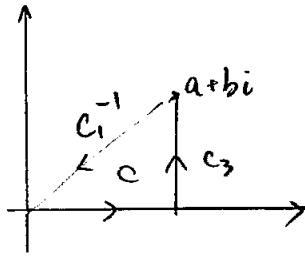
$C \in z(t) (t; t_1 \rightarrow t_2)$  で表わす.

$C^{-1}: z(t) (t; t_2 \rightarrow t_1)$

したがって,

$$\begin{aligned} \int_{C^{-1}} f(z) dz &= \int_{t_2}^{t_1} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt \\ &= - \oint_C f(z) dz \end{aligned}$$

問 1) (1)

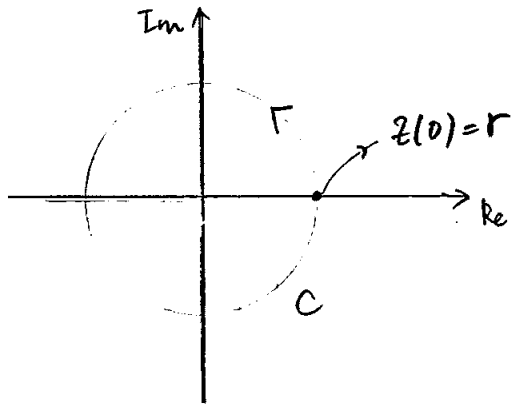


C は  $C_3$  と  $C_1^{-1}$  とで囲まれた領域  $D$  の境界線である。

$$\oint_C z dz = \int_{C_3} z dz + \int_{C_1^{-1}} z dz = \int_{C_3} z dz - \int_{C_1} z dz = 0$$

問 2)

1)  $f(z) = z$



$C \in \mathbb{R}$

$$z(t) = x(t) + i y(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = r \cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases}$$

$$z(t) = r \cos t + i r \sin t = r e^{it}$$

$$t: 0 \rightarrow 2\pi$$