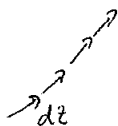


$$\int_C f(z) dz \quad \varepsilon \text{ 計 算 上 } z = x + iy$$

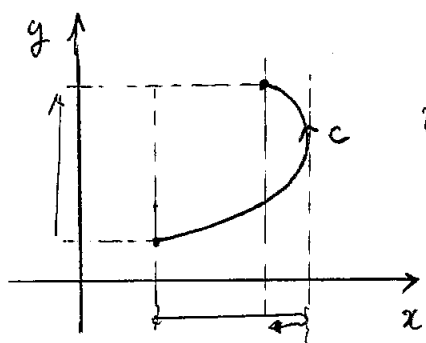


$$z = x + iy \quad z \text{ の 複素共役 } \quad \begin{cases} f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y) \\ dz = dx + i dy \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + i v) (dx + i dy) \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy) \end{aligned}$$

実関数の線積分に書きかわれた。

dx, dy は u, v の線積分では？



$$u = u(x, y)$$

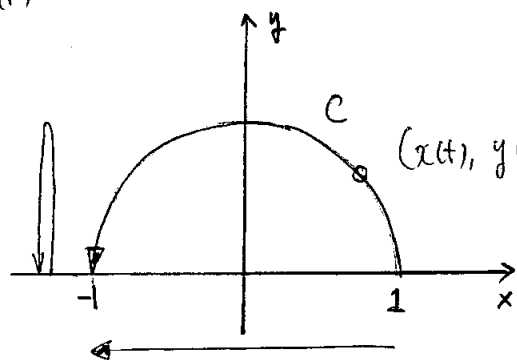
$$\int_C u dx = ?$$

$$\int_C u dy = ?$$

x, y へ 射影 して 線積分

12. (1)

2



$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$$t : 0 \rightarrow \pi$$

$$\int_C dx = \int_0^\pi \frac{dx(t)}{dt} dt$$

$$= \int_0^\pi -\sin t dt = \cos t \Big|_0^\pi = -2$$

$$\int dy = \int_0^\pi \frac{dy}{dt} dt = \int_0^\pi \cos t dt = 0$$

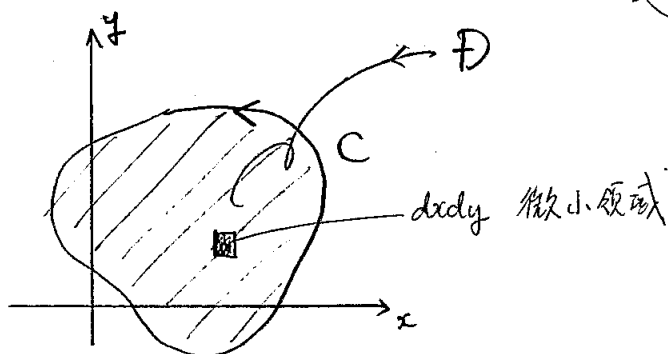
グリーンの公式

$$P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y)$$

を閉じた経路 C に沿って周回積分すると次の公式が成立する。

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

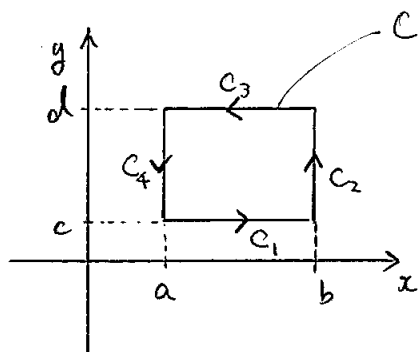
線積分
(周回 ")



面積分

④

(略証) C を、長方形の経路を考へる。



$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\oint_C p dx = \sum_{i=1}^4 \int_{c_i} p dx$$

$$= \int_{c_1} P(x,y) \frac{dx(t)}{dt} dt + \int_{c_2} P \frac{dx}{dt} dt + \int_{c_3} P \frac{dx}{dt} dt + \int_{c_4} P \frac{dx}{dt} dt$$

$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=c \\ t: a \rightarrow b \end{cases}$

$\begin{cases} x(t)=b \\ y(t)=t \\ t: c \rightarrow d \end{cases}$

$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=d \\ t: b \rightarrow a \end{cases}$

$\begin{cases} x(t)=a \\ y(t)=t \\ t: d \rightarrow c \end{cases}$

$$= \int_a^b P(t, c) dt + \int_b^a P(t, d) dt$$

$$= - \int_a^b [P(t, d) - P(t, c)] dt$$

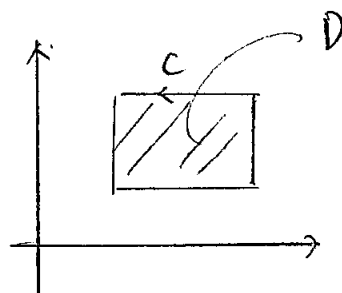
$$= - \int_a^b \left[P(t, s) \right]_c^d dt$$

新しい変数

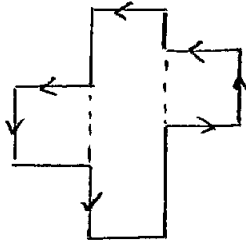
$$= - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(t, s)}{\partial s} ds dt$$

$$= - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$$

$$= - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

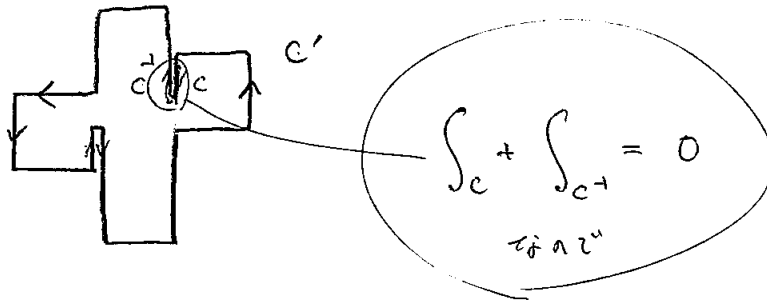


次に、下の経路^cで積分する。

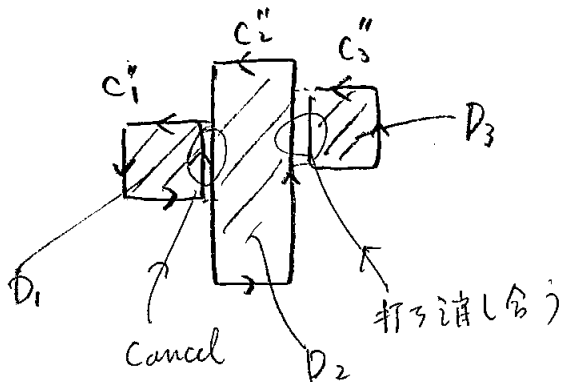


長方形 3つ。

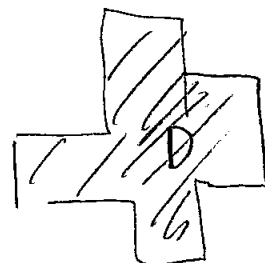
これは、次の経路 c' に沿う積分と同じ



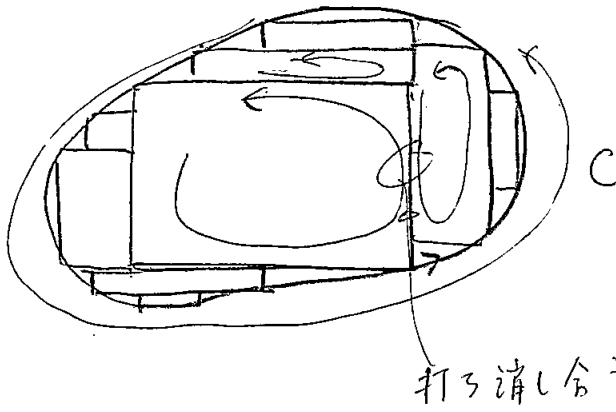
さらに、下の経路 c'' に沿う積分と同じ



$$\begin{aligned} \oint_c P dx &= \int_{c_1''} + \int_{c_2''} + \int_{c_3''} P dx \\ &= \int_{c_1''} P dx + \int_{c_2''} P dx + \int_{c_3''} P dx \\ &= - \int_{D_1} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \int_{D_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy - \int_{D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= - \int_{D_1 + D_2 + D_3} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$



一般の経路の場合. $\rightarrow$ 長方形のグリッドに分割



$\rightarrow$ 周りの C だけが残る.

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \sum_i \oint_{C_i} P dx \\ &= \sum_i \int_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \int_{\sum_i D_i} -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \int_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \end{aligned}$$

$C_i \leftarrow$ 長方形

同様に.

$$\oint_C Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

よって、グリーンの公式

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \int_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$

$$\begin{aligned}
 \oint f(z) dz &= \oint (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy) \\
 &= \int_D \underbrace{\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\text{C-R 関係式}} dx dy + i \int_D \underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{\text{C-R 関係式}} dx dy
 \end{aligned}$$

ゆえに、 D の各点で C-R 関係式が成立していれば、

$$\oint f(z) dz = 0.$$

定理 コーシーの積分定理

$f(z)$ が D で正則なら

$$\oint_C f(z) dz = 0$$