

§4. 複素関数の具体例.

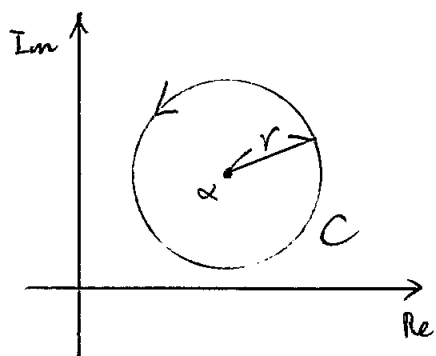
①

§4.1 基の例題

$$f(z) = (z - \alpha)^n \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad n: \text{整数}$$

$$\int_C f(z) dz = ?$$

C は、中心 $\alpha \in \mathbb{C}$ で半径 r の円.



(i) $n \geq 0$ のとき

$f(z)$ は 全ての $\mathbb{C}$ で 正則.

($\because z = \alpha$ を除く。かつ、発散しない)

$\Rightarrow$ $z = \alpha$ の積分定理より

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

(ii) $n = -1$ のとき.

$$f(z) = \frac{1}{z - \alpha} \quad \text{は} \quad z = \alpha \text{ で} \underline{\text{正則でない。}}$$

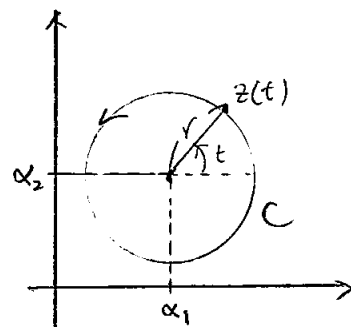
" $z = \alpha$ の積分定理はつかえない"

C 上の点 $z(t) = x(t) + iy(t)$ と.

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 + r \cos t \\ y(t) = \alpha_2 + r \sin t \end{cases} \quad t: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\text{ただし, } \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } z(t) &= \alpha_1 + r \cos t + i\alpha_2 + ir \sin t \\ &= \alpha + re^{it} \end{aligned}$$



②

$$\begin{aligned}
 \oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{\alpha + re^{it}} - \alpha} \cdot rie^{it} dt \\
 &= \underline{\underline{2\pi i}} \quad \leftarrow \begin{array}{|l|} \hline \alpha, r: \text{無関係} \\ \hline \text{経路} \end{array}
 \end{aligned}$$

(iii) $n \leq -2$ のとき.

$$m = -n \geq 2 \text{ とおける.}$$

$$f(z) = (z - \alpha)^n = \frac{1}{(z - \alpha)^m}$$

$z = \alpha + r$ 正則なとき.

$$z(t) = \alpha + re^{it} \quad (t: 0 \rightarrow 2\pi) \text{ とおける}$$

$$\begin{aligned}
 \oint f(z) dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cancel{\alpha + re^{it}} - \alpha)^m} rie^{it} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{it}}{r^m e^{imt}} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} i r^{1-m} e^{i(1-m)t} dt \\
 &= i r^{1-m} \left. \frac{e^{i(1-m)t}}{i(1-m)} \right|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{r^{1-m}}{1-m} \left\{ \underbrace{e^{2\pi i(1-m)}}_0 - 1 \right\} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

まとめ.

$$\oint (z - \alpha)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & (n = -1 \text{ のとき}) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

楕円 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に対して,

$$\oint_C \frac{2z}{z^2 - 1} dz = ?$$

普通にパラメータ表示で計算しようとする。

$$x(t) = 2\cos t$$

$$t: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$y(t) = \sin t$$

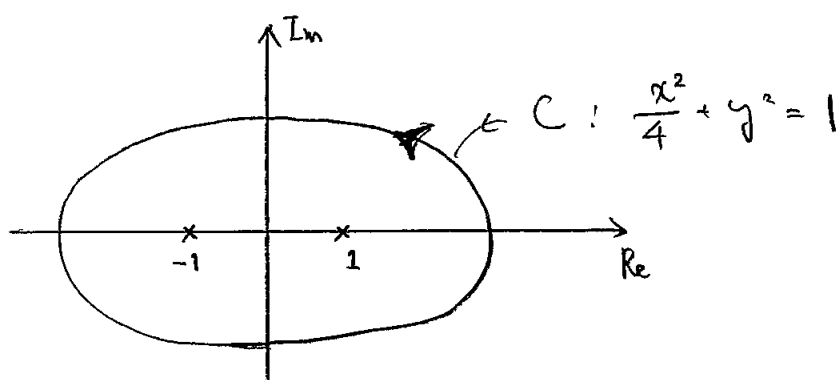
$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(z(t)) \frac{dz}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2(\cos t + i \sin t)}{(2\cos t + i \sin t)^2 - 1} \cdot (-2\sin t + i \cos t) dt \end{aligned}$$

大変だ!!

√
z 変換

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{2z}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}$$

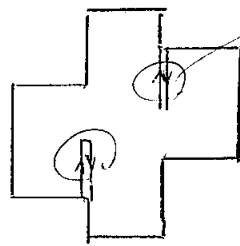
$z = \pm 1$ で発散



$f(z)$ は C の内部で正則ではない

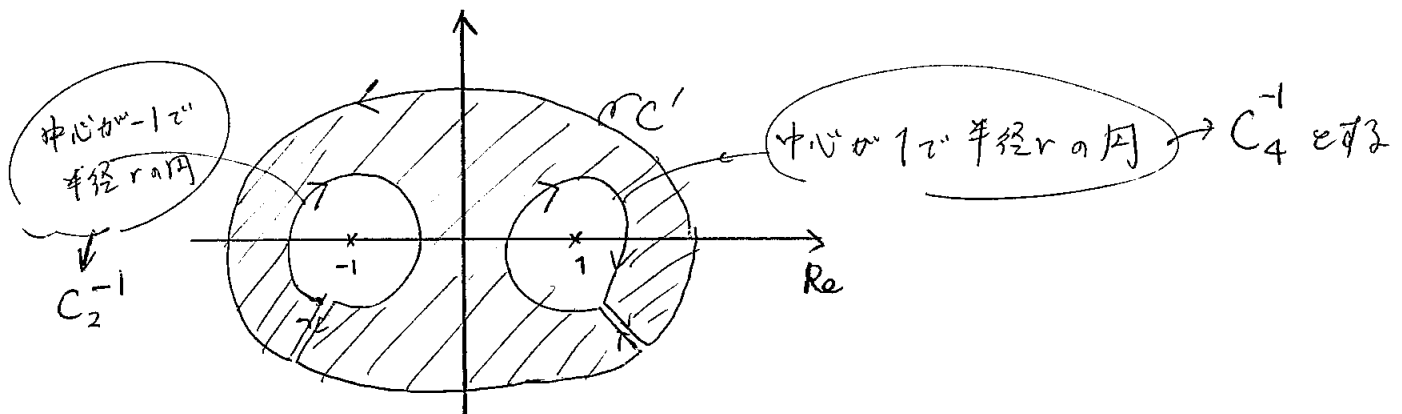
コーシーの定理が使えるように C を変形

グリーンの定理の証明にき



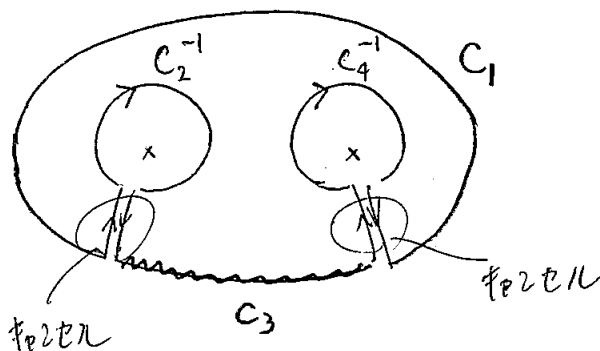
$$\int_C + \int_{C^{-1}} = 0$$

次の経路 C' を考えよ



C' の内部領域「////」は、 $z = \pm 1$ を含まない $\Rightarrow$ 正則

改めて経路を明示.



つまり

$$C' = C_1 + C_2^{-1} + C_3 + C_4^{-1}$$

すると、 C' の内部で $f(z)$ は正則

ゆえに コーシー の定理より

$$\int_{C'} f(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\int_{C_1} + \int_{C_2^{-1}} + \int_{C_3} + \int_{C_4^{-1}} \right) f(z) dz = 0$$

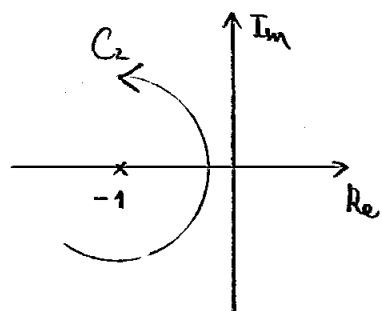
ゆえに、

$$C = C_1 + C_3 \text{ 及び}$$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz \\ &= - \int_{C_2^{-1}} f(z) dz - \int_{C_4^{-1}} f(z) dz \\ &= \oint_{C_2} f(z) dz + \oint_{C_4} f(z) dz \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \int_{C^{-1}} = - \int_C$$

(i) 第1項を計算

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} f(z) dz &= \oint_{C_2} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) dz \\ &= \oint_{C_2} \frac{1}{z+1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz \end{aligned}$$



C_2 の内部で $\frac{1}{z+1}$ は正則で $\frac{1}{z-1}$ は ∞ の極をもつ $\rightarrow$ パラキータ積分

$-\bar{\rho}$, $\frac{1}{z-1}$ は C_2 の内部で正則

$\rightarrow$ コーシーの定理より

$$\oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz = 0$$

ゆえに、

$$\oint_{C_2} \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i \quad (\because \S 4.1)$$

結局

$$\oint_{C_2} f(z) dz = 2\pi i$$

(ii) 第2項

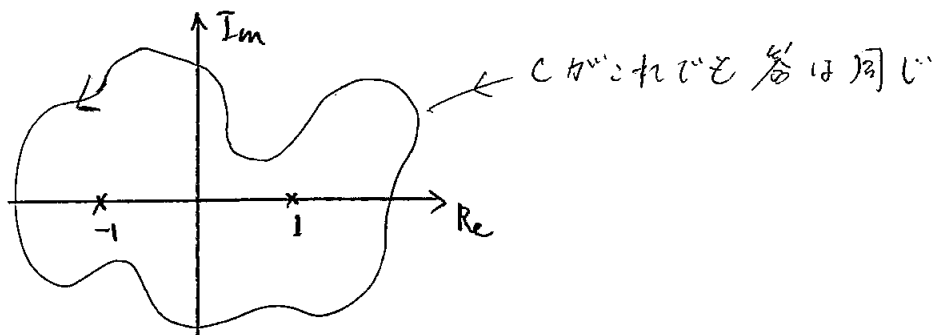
同様に C_4 で

$$\oint_{C_4} f(z) dz = 2\pi i$$

以上より

$$\oint_C f(z) dz = 4\pi i$$

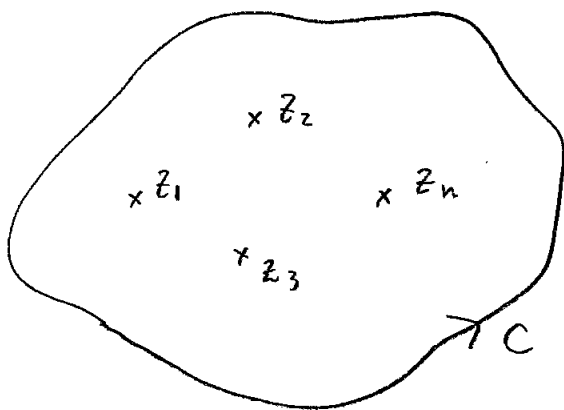
(注意)



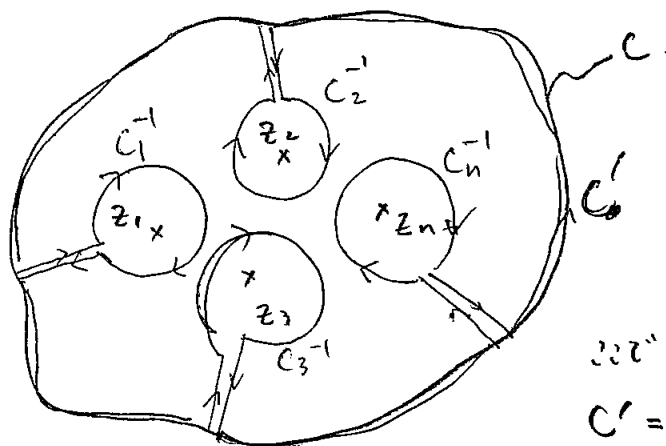
(一般化)

$f(z)$ が C の内部に

$z_1, z_2, \dots, z_n$ を除いて正則であるとする。



下の経路を考える



C' の内部で $f(z)$ は正則

ゆえに コーシーの定理より

$$\oint_{C'} f(z) = 0$$

よって

$$C' = C + \underbrace{C_1^{-1} + C_2^{-1} + \dots + C_n^{-1}}_{\text{経路の結合}}$$

ゆえに $\oint_C + \oint_{C_1^{-1}} + \dots + \oint_{C_n^{-1}} = 0$

$$\therefore \oint f(z) dz = - \oint_{C_1^{-1}} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n^{-1}} f(z) dz$$

特異点 z_i の外に依存

結局 $\oint f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} f(z) dz$

結果 = 特異点の寄与の和