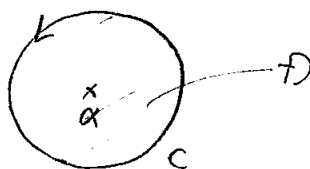


§5.1

§5.1.2

$$\oint_C \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i$$

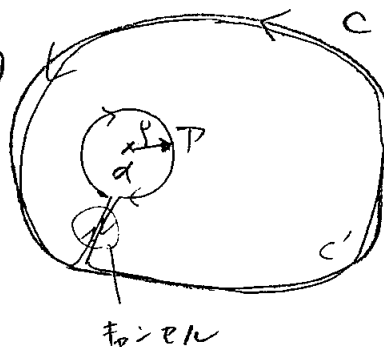


$$\oint \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = ?$$

$f(z)$ は C 内 z で正則

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \oint_{C'} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - \oint_{P-1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

$$= \oint_P \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$



$$= \oint_P \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz + f(\alpha) \oint_P \frac{1}{z-\alpha} dz$$

$f(z)$ は z で正則

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} = f'(\alpha)$$

P の半径 $\rho \in 0$ となるように

$$\left| \oint_P \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz \right| \leq \oint_P \left| \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} \right| |dz| = |f'(\alpha)| \int_0^{2\pi} \rho d\theta = 2\pi \rho |f'(\alpha)|$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$$

$$\rho \rightarrow 0$$

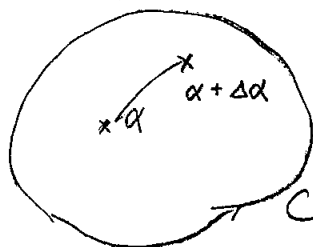
ρ は $n < \rho < \infty$ となるように

よって

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \quad (\text{コシーの積分公式})$$

任意の点 α における正則関数 $f(z)$ の値は、

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - \alpha} dz \quad (*)$$



$f(\alpha)$ の微分を求めたい。

$$f(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - (\alpha + \Delta\alpha)} dz$$

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha + \Delta\alpha) - f(\alpha)}{\Delta\alpha} &= \frac{1}{2\pi i \Delta\alpha} \oint_C \left(\frac{f(z)}{z - (\alpha + \Delta\alpha)} - \frac{f(z)}{z - \alpha} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)(z - \alpha - \Delta\alpha)} dz \end{aligned}$$

$\Delta\alpha \rightarrow 0$ とすると右辺は $f'(\alpha)$ に収束する。

$$f'(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^2} dz$$

同様に $f''(\alpha), f'''(\alpha), \dots$ を求める。

一般に

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} dz$$

グーサーの公式

書きかえると

$$\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1}{z - \alpha} \right) dz$$

形式的、周回積分(*)について、積分と微分の順序を入れかえても等しい。

§6.1 正則関数とべき級数

正則関数 $\leftrightarrow$ GR

例として

$$f(z) = e^z$$

$$f(z) = \sin z$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z=1 \text{ 以外})$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \leftarrow \text{べき級数の形に表す}$$

$$\text{例として, } f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \leftarrow \text{べき級数の形に表す}$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

例として

べき級数 $\Leftrightarrow$ 正則関数

例]

$$(1) \oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz$$

$\swarrow$ C は $|z|=1$ の円

$$= 2\pi i \left[e^{iz} \right]_{z=0} = 2\pi i$$

(2)

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-2iz} dz$$

$\swarrow$ C は $|z|=1$ の円

$$= \oint_C \frac{z^2+1}{z(z-2i)} dz = 2\pi i \left[\frac{z^2+1}{z-2i} \right]_{z=0} = 2\pi i \frac{1}{-2i} = -\pi$$

(2)

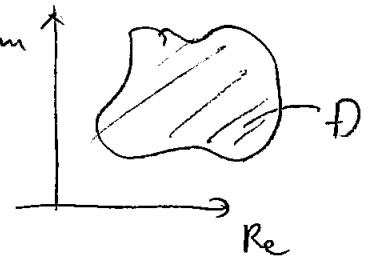
$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束性を議論したい。

→ $\mathbb{C}$ 上のどこで?

∴

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$



と定義する。

領域 D 内の点 z で、 $S_n(z)$ の $n \rightarrow \infty$ とき、

$S_n(z)$ がある値に限りなく近づくとき、べき級数 $S(z)$ は点 z で

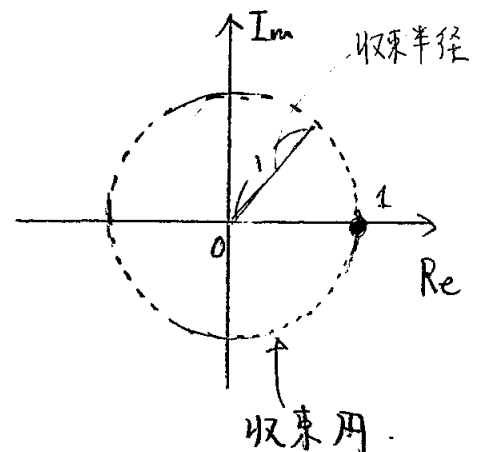
収束すると言う。

$$S(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$$

具体例

$$S_n(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k \quad \text{と表すとき、}$$

$$S(z) = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & (z \neq 1) \\ n+1 & (z = 1) \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} \text{発散} & |z| > 1 \\ \text{収束} & |z| < 1 \end{cases}$$

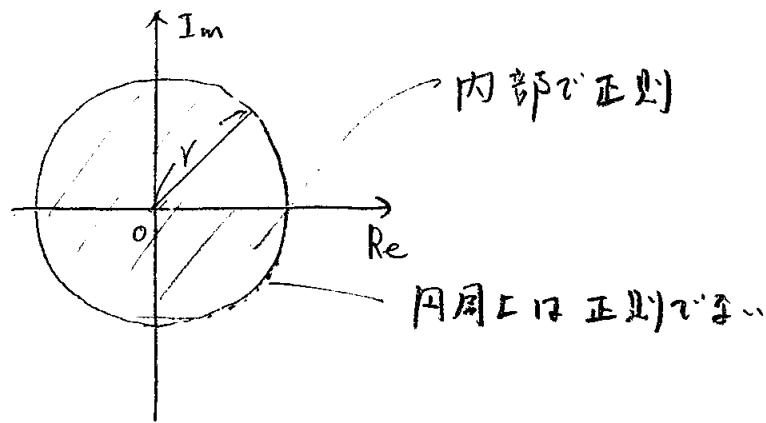
したがって、 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ は領域 $|z| < 1$ で収束し、

この領域内で複素関数 $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

と与える。 $f(z)$ は $|z| < 1$ で正則で、 $z=1$ に特異点をもつ。

一般に、



原点を中心とする半径 r の円内領域 D で λ 級数収束するとき、この円を収束円、 r を収束半径という。

そこで、 λ 級数で定義された関数は収束円の内部で正則かつ、円周上に特異点をもつ。

▷ 収束半径の求め方

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ が存在すれば、 $\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ " $\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

直感的な意味

$$|f(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \quad \text{について}$$

① 仮定 $|a_n| |z|^n > |a_{n+1}| |z|^{n+1}$ のとき

$$\Leftrightarrow |z| < \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{収束半径!}$$

② 仮定 $|f(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} |z| \right)^n \quad \text{仮定より}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} |z| < 1 \quad \text{を仮定する。} \quad \therefore |z| < \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

例1 次の収束半径を求めよ.

(4)

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$$

$$(1) \quad a_n = 1 \quad \text{① ②} \quad \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \quad \underline{r=1}$$

$$(2) \quad a_n = n \quad \text{"} \quad \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1 \quad \underline{r=1}$$

$$(3) \quad a_n = \frac{1}{n^n} \quad \text{② ③} \quad \frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n} \right)^n} = 0 \quad \underline{r=\infty}$$

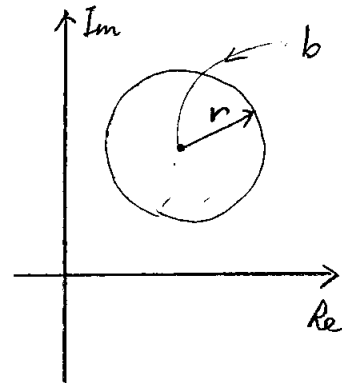
「べき級数 $\Leftrightarrow$ 正則関数」

$f(z)$ の点 $b \in \mathbb{C}$ まわりでのべき級数展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

§6.1より $b=0$

これが $|z-b| < r$ で収束するとき。
 r は収束半径。



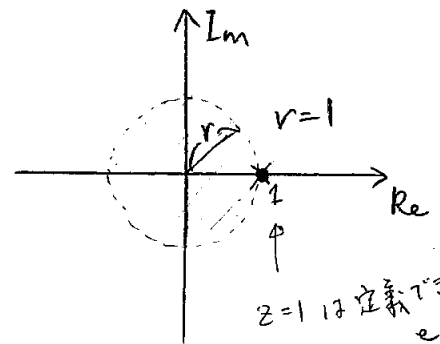
例

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

(1) $b=0$ まわり

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$|z| < 1$ で収束 $\rightarrow r=1$



(2) $b=i$ まわり

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i - (z-i)}$$

$$= \frac{1}{1-i} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-i}{1-i}\right)}$$

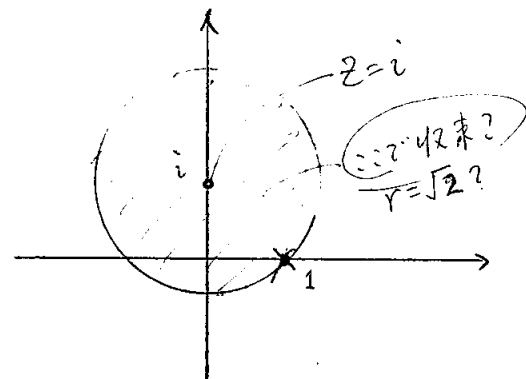
$$= \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$$

これより

$$\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{1}{(1-i)^{n+1}}} (z-i)^n$$

$b=i$



収束半径は、

$$\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < \sqrt{2}$$

§6.2 $r=\sqrt{2}$