

§6.2.2 Taylor 展開

⑥

$f(z)$ は ある領域で正則

円の内部



この領域内の点 b において

$f(z)$ をべき級数展開する.

半径は、正則性が保れる最大の大きさにとる

コシーの積分公式を用いて $f(z)$ を表現

264

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

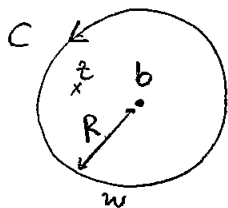
図の円. $|z-b|=R$

$\frac{1}{w-z}$ は C 内でべき級数展開.

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-b - (z-b)} \\ &= \frac{1}{w-b} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-b}{w-b}\right)} \\ &= \frac{1}{w-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-b}{w-b}\right)^n \end{aligned}$$

ただし、

$$\left| \frac{z-b}{w-b} \right| < 1 \quad \text{の領域}$$



$$\left| \frac{z-b}{w-b} \right| = \frac{|z-b|}{|w-b|} = \frac{|z-b|}{R} < \frac{R}{R} = 1$$

R

$\Rightarrow$ 円 C 内で、確かに収束

②

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \frac{1}{w-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-b}{w-b} \right)^n dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w-b)^{n+1}} (z-b)^n dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(w) \frac{1}{(w-b)^{n+1}} dw}_{a_n} \right] (z-b)^n$$

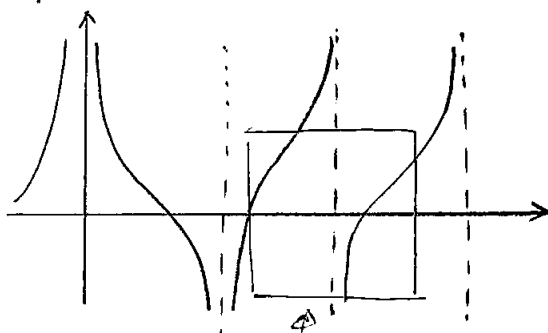
$\Rightarrow$ 複素関数のテイラー展開.

§6.3 ローラン展開

①

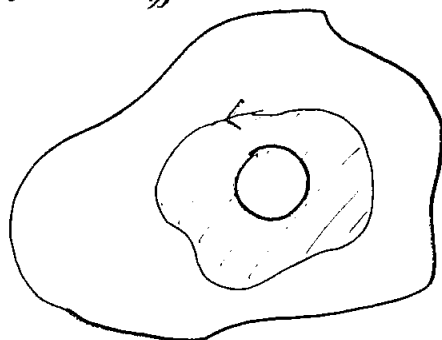
→ 正則ではない領域を囲む場合での展開

実関数に例えると、



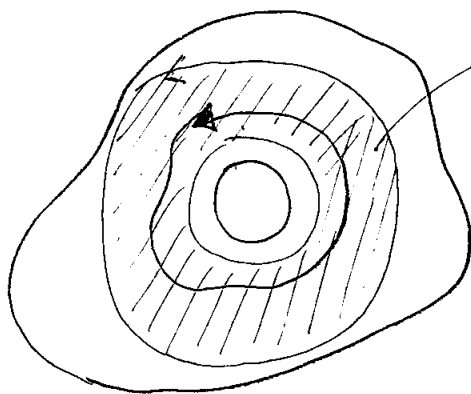
特異点を含み展開

複素数の場合、



正則でない領域に注目することが多い。

どう展開するか？



興味のある経路を含むように
ドーナツ型の領域を考える。

この内部で展開。

⇒ ローラン展開。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n$$

↑
 $n < 0$ がある。

781)

$$f(z) = \left[\dots + \frac{a_{-2}}{(z-b)^2} + \frac{a_{-1}}{z-b} \right] + a_0 + a_1(z-b) + a_2(z-b)^2 + \dots$$

* 積分が目的であれば、

必要な情報は a_{-1} のみ

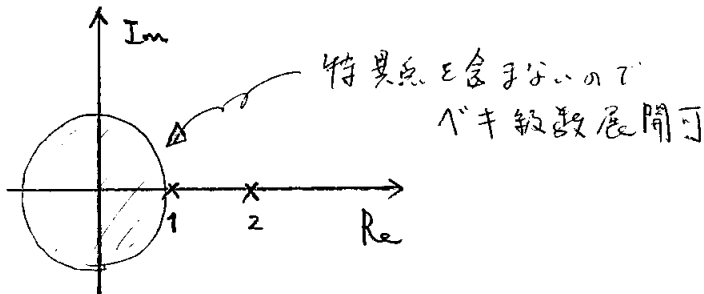
← 留数定理

例. z -ラン展開.

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

↑ $z=1, 2$ が極点.

(1) 中心 $z=0$, 領域 $|z|<1$



$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w} \quad |w|<1 \quad \text{を使う.}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (\because |z|<1)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2}{z-2} = \frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

↑
 $\because \left|\frac{z}{2}\right| = \frac{|z|}{2} < \frac{1}{2} < 1$

以上より

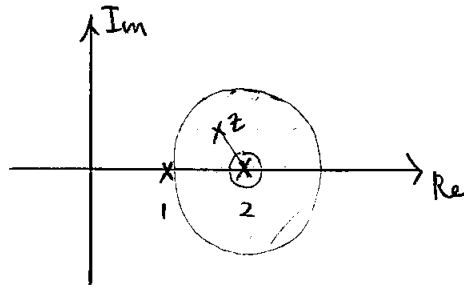
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n$$

↓
 a_n

← $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots$ は、 $\frac{1}{2^n}$

(2) $z=2$ を中心に $0 < |z-2| < 1$ の領域で展開



$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-2)^n$$

の形にしたい

② 第2項

$$\frac{2}{z-2} = 2(z-2)^{-1} \quad \text{すでに求める形}$$

① 第1項

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-2)-2} = \frac{1}{-1-(z-2)}$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-2}{-1}\right)}$$

$$\left(\because \left| \frac{z-2}{-1} \right| = |z-2| < 1 \text{ より} \right)$$

$$= (-1) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-2}{-1} \right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$$

結局

$$f(z) = \boxed{2}(z-2)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{(-1)^{n+1}}(z-2)^n$$

$\uparrow$ a_{-1}
 $\uparrow$ $a_0, a_1, \dots$

86.4

定義域の拡張 ~ 解析接続 ~

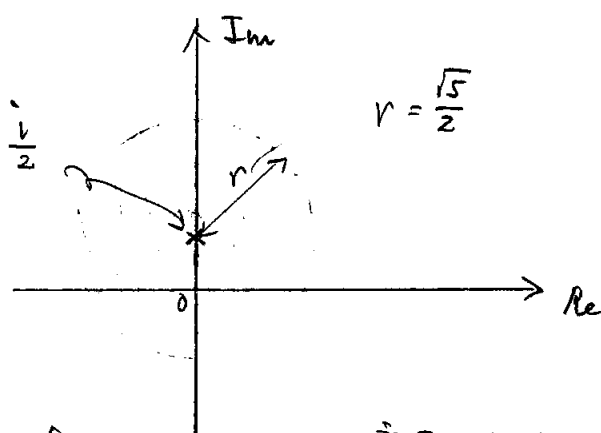
例として. $z = \frac{1}{2}$ を中心とした級数と考える.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{2-i} \right)^{n+1}}_{a_n} \left(z - \frac{i}{2} \right)^n$$

収束半径は.

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{2-i} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$r = \frac{\sqrt{5}}{2} \sim 1.1180 \dots$$



よ $f(z)$ は、次のように変形できる

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2-i} \right)^{n+1} \left(z - \frac{i}{2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} \right)^{n+1} \left(z - \frac{i}{2} \right)^n \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{2}} \right) \cdot \left\{ 1 + \frac{z - \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}} + \left(\frac{z - \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}} \right)^2 + \dots \right\}$$

初項 $\frac{1}{1 - \frac{i}{2}}$, 公比 $\frac{z - \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}}$ の等比級数の和

$$= \frac{1}{1 - \frac{i}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}}}$$

$$= \frac{1}{1 - \cancel{\frac{i}{2}} - \left(z - \cancel{\frac{i}{2}} \right)} = \frac{1}{1-z} = g(z)$$

$g(z)$ は $z=1$ を除く全ての点 z で定義されている。 $\Rightarrow g(z)$ は $f(z)$ の自然拡張 (解析接続)