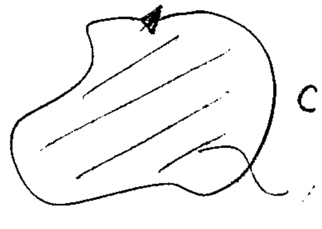
~~§5-4~~ §7-1 留数定理

$f(z)$が閉曲線C内で正則

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

（コーシーの積分定理）

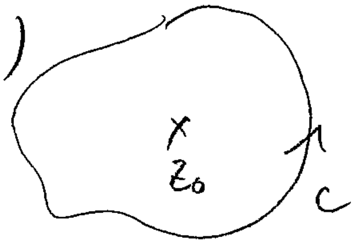


Q. もし、$f(z)$がC内で特異点をもつとどうなる？

たとえば

$$f(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + h(z) \quad (5.9)$$

$$(\alpha_{-m} \neq 0 \quad m \geq 1)$$



の周回積分を考える。

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m}dz + \oint \frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}dz$$

$$+ \cdots + \oint_C \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0}dz + \underbrace{\cancel{\oint_C h(z)\,dz}}_{\text{コーシーの定理}} \to 0$$

前回の講義で

$$\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \qquad \oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^m} = 0 \quad (m \neq -1)$$

$$= 2\pi i\,\alpha_{-1}$$

すなわち、$f(z)$が(5.9)式で与えられるとき、その周回積分は、$\frac{1}{z-z_0}$の係数α_{-1}の$2\pi i$倍に等しい。

一般に

係数α_{-1}を$f(z)$の$z=z_0$における留数（Residue）といい、

$$\alpha_{-1} = \mathrm{Res}\,f(z_0) \quad \text{または} \quad \alpha_{-1} = \mathrm{Res}[f]_{z=z_0}$$

で表わす。

例　$f(z)=\dfrac{z}{(z-z_0)^2}$ について　$\mathrm{Res}\, f(z_0)$ を求める。また、$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\, f(z_0)$ を確かめる。

(解)

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_0)^2} = \frac{z_0}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{z-z_0} \quad \text{より}$$

$$\mathrm{Res}\, f(z_0) = 1$$

点 z_0 を中心に半径 ε の円で C をとれば、

$$\oint f(z)\,dz = \oint \frac{z}{(z-z_0)^2}\,dz \qquad z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}, \quad dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{\varepsilon}\ \cancel{e^{i\theta}}}{\varepsilon^{\cancel{2}}\,\underbrace{\cancel{e^{2i\theta}}}_{e^{-i\theta}}}\,d\theta \cdot (z_0 + \varepsilon e^{i\theta})$$

$$= \overbrace{\int_0^{2\pi} i z_0 \varepsilon^{-1} e^{-i\theta}\,d\theta}^{0} + \int_0^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i$$

点z_0で m位の極をもつ関数 $f(z)$ は、z_0の近くで(5.9)式にように表わされる(ローラン展開 ← 次回の議論)

なので、一般に、

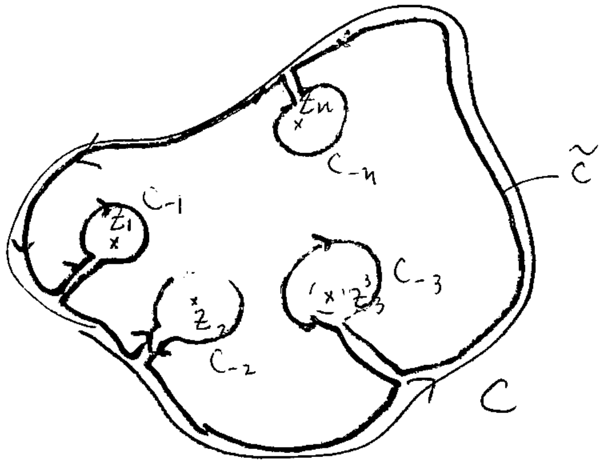
$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\, f(z_0)} \qquad 5.13$$

で与えられる。

次に特異点が C 内に 2個以上ある場合を考える。

そのとき

$$\oint_C f(z) = ?$$



⇒ 各特異点を囲むように経路を変形

$$\oint_{\tilde{C}} f(z)\,dz = \oint_C f(z) + \oint_{C_{-1}} f(z)\,dz + \oint_{C_{-2}} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_{-n}} f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,dz$$

各 C_i の内には、特異点はただ一つなので

$$\oint_{C_i} f(z)\,dz = 2\pi i f(z_i)$$

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} 2\pi i \,\mathrm{Res}\, f(z_j)}$$

(留数定理)

すなわち、

各特異点の留数がわかれば、それらの特異点を囲む

$f(z)$ の周回積分がただちに求まる!!

<u>留数の求め方</u>

$f(z)$ が $z=z_0$ で m 位の極をもつ

これが欲しい

$z=z_0$ 近くで

$$f(z) = \frac{\alpha_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{\alpha_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} + h(z)$$

$$(z-z_0)^m f(z) = \alpha_{-m} + (z-z_0)\alpha_{-m+1} + \cdots + (z-z_0)^{m-1}\alpha_{-1} + (z-z_0)^m h(z)$$

$$\lim_{z\to z_0}\{\quad\} = \alpha_{-m} \ (\neq 0)$$

次に

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}\{\ \ 〃\ \ \} = \alpha_{-m+1}$$

$(m-1)$ 回くりかえすと、

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{\ \ 〃\ \ \} = (m-1)!\,\alpha_{-1}$$

よって、$f(z)$ の留数 $\mathrm{Res}\, f(z_0)$ は、

$$\alpha_{-1} = \mathrm{Res}\, f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}$$

特に、z_0 が $f(z)$ の1位の極なら

$$\mathrm{Res}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

ここで $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ とおくと、z_0 で 1位の極なら

$$\begin{cases} q(z) = b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots & (b_1 \neq 0) \\ p(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \end{cases}$$ とおける。

よって、

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots}{b_1 + b_2(z-z_0) + \cdots}$$

$$= \frac{c_0}{b_1}$$

$$= \underline{\underline{\left. \frac{p(z)}{q'(z)} \right|_{z=z_0}}}$$

例

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+a^2} \quad (a>0)$ の各特異点での留数を求めよ

$z^2+a^2=0 \quad \rightarrow \quad z = \pm ia$ で 1位の極.

$z_0 = ia \qquad \mathrm{Res}\, f(ia) = \left.\dfrac{1}{2z}\right|_{z=ia} = \dfrac{1}{2ia} = -\dfrac{i}{2a}$

$z_1 = -ia \qquad \mathrm{Res}\, f(-ia) = \left.\dfrac{1}{2z}\right|_{z=-ia} = \dfrac{1}{-2ia} = \dfrac{i}{2a}$

例

$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ の $z=i$ における留数

$z=i$ で $f(z)$ は 2位の極

$$\mathrm{Res}\, f(i) = \lim_{z\to i}\left\{\frac{d}{dz}\cancel{(z-i)^2}\frac{1}{(z^2+1)^2}\right\} \rightarrow (z+i)^2\cancel{(z-i)^2}$$

$$= \lim\left\{-2(z+i)^{-3}\right\}$$

$$= -2\,\frac{1}{-8i} = \frac{-i}{4}$$