§8.1 Fourier 級数（フーリエ級数）

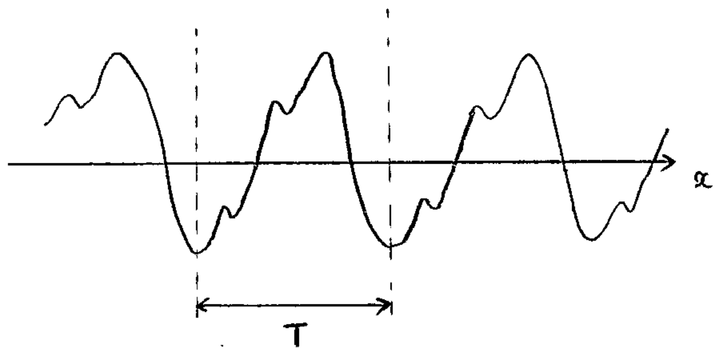
▷ 周期関数の三角関数の級数で展開

周期関数

すべての x について、$f(x+T)=f(x)$ なる関数

正の定数 ⇒ 周期 T

例



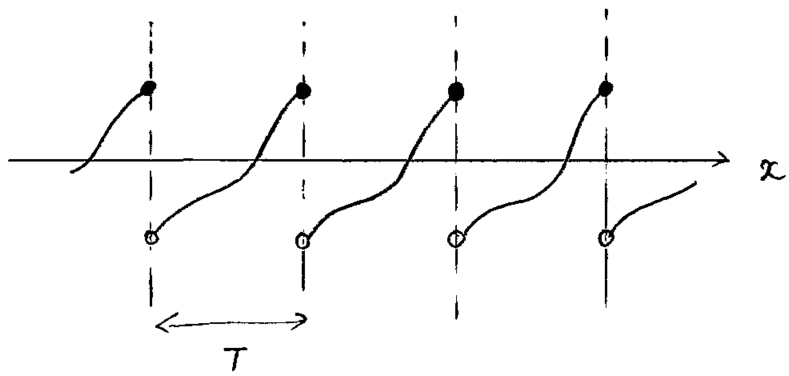
性質）① 整数 n について、$f(x+nT)=f(x)$

つまり、$2T$, $3T$, … も周期

特に T を"基本周期"という

② 周期関数 $f(x)$, $g(x)$ ⇒ $\underbrace{af(x)+bg(x)}_{\text{線形結合}}$ も周期関数

▷ 区分的に連続な関数も OK.



▷ フーリエ級数

$f(x)$ が 周期 $T=2\pi$ をもつとき、$f(x)$ は 次のように展開できる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots\cdots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots\cdots$$

定数項
$\frac{1}{2}$ は 便利だから
つけた。

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right)}$$

フーリエ級数

a_n, b_n を フーリエ係数 という。
$(n=0,1,2,\cdots)$

▷ 三角関数の直交性 ⟺ ベクトル

m, n を 整数とするとき、以下が成り立つ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \pi\,\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \pi\,\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

(クロネッカーのデルタ)

ベクトルの直交性との類似

① $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \cdots\}$

$$\int_{-L}^{L} \cos x \cos 2x \, dx = 0 \qquad \int_{-L}^{L} \cos^2 x \, dx = \pi$$

② $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

（証明）

$$\int_{-L}^{L} \cos mx \cos nx \, dx = \pi \delta_{mn}$$

$m \neq n$ のとき

$$\text{左辺} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left\{ \cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0 .$$

$m = n$ のとき

$$\text{左辺} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2nx\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$

▷ フーリエ係数

三角関数の直交性から

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

証明

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx}_{\pi\delta_{mn}} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx}_{0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pi \delta_{mn}$$

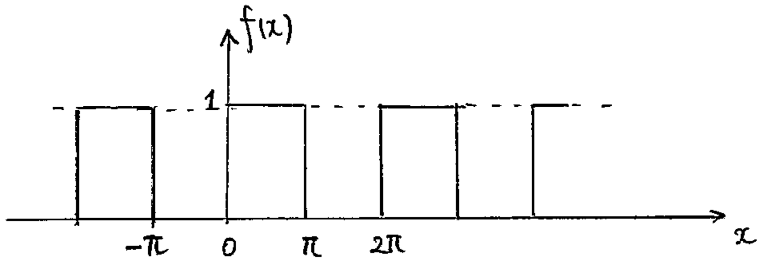
$$= \pi a_m$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx. \qquad //$$

b_n も同様

例　周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n\pi}\Big[\sin nx\Big]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\Big[\cos nx\Big]_0^{\pi}$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

よって

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

▷ 周期が任意の長さのフーリエ展開

今まで、周期 2π → 周期 $2L$

$(-\pi \leq x < \pi \longrightarrow -L \leq x' < L)$

x を $\frac{L}{\pi}$ 倍すればよい。($x' \to \frac{L}{\pi}x$ と変換)
"スケール変換"

すると、

$$\boxed{\begin{aligned} f(x') &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x' + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x'\right) \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x') \cos\frac{n\pi}{L}x'\,dx' \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x') \sin\frac{n\pi}{L}x'\,dx' \end{aligned}}$$

となる。あとは、x' を x と書きなおせばよい。

§ 8.2 複素フーリエ級数.

$$\cos\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right)$$

$$\sin\frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right)$$

をフーリエ級数の式へ代入.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} + e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right) + b_n\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x} - e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right)\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi}{L}x} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right\}$$

ここで, $C_0 = \dfrac{a_0}{2}$ $n \geq 1$について, $\left.\begin{array}{l} C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} \\ C_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2} \end{array}\right\}$ を定義すると,

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}}$$

となる.

また, $C_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2} = \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L}dx\, f(x)\left(\cos\frac{n\pi}{L}x - i\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}dx\, f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x} \qquad n = \cdots\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\cdots}$$

☆ 指数関数の肩の符号に注意!

上式を $f(x)$ の複素フーリエ級数という.

<u>直交性関係</u>

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i\frac{n\pi}{L}x}\left(e^{i\frac{m\pi}{L}x}\right)^{*}dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i(n-m)\frac{\pi}{L}x}dx = \delta_{nm}$$