

周期 $T (= \frac{2L}{2\pi})$ の関数 $f(x)$ を 三角関数で展開 $\rightarrow$ フーリエ級数 (指数)

周期 がない " (複素) 指数 $\rightarrow$ フーリエ変換

周期 $2L \rightarrow \infty$ とすればよい. Q どうやる?

複素 フーリエ級数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi}{L} x} dx$$

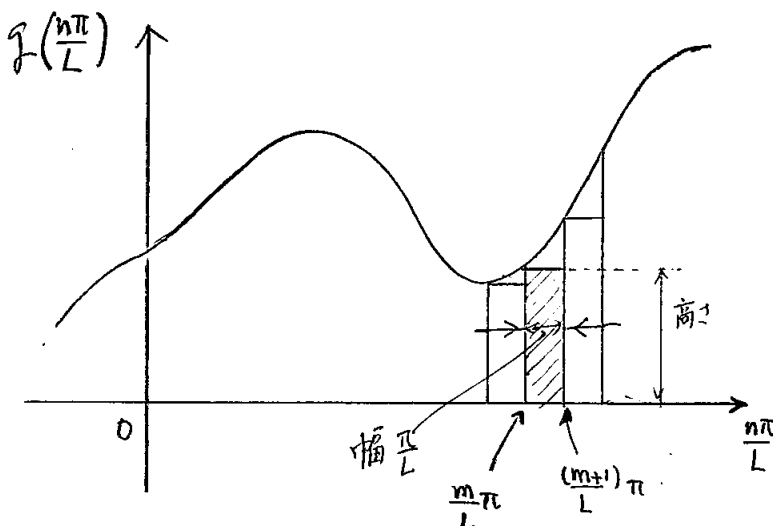
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x') e^{-i \frac{n\pi}{L} x'} dx' \right\} e^{i \frac{n\pi}{L} x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x') e^{i \frac{n\pi}{L} (x-x')} dx'$$

ここで x は固定し、 $\sum$ の中を次のようにおく

$$g\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \int_{-L}^L f(x') e^{i \frac{n\pi}{L} (x-x')} dx'$$

$g\left(\frac{n\pi}{L}\right)$ とおく.



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} g\left(\frac{n\pi}{L}\right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) dk$$

$L \rightarrow \infty$ で、連続とみなせる.

(但し、 $k = \frac{n\pi}{L}$ とおいた.)

したがって

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} g\left(\frac{n\pi}{L}\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} g\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) dk$$

したがって、

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{ik(x-x')} f(x')$$

となる。

$f(x)$ の フーリエ積分表示

* $f(x)$ は、必ずしも 周期関数である必要はない。

さらに、少し書き加える。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x')}_{k \text{ の関数}} \right)$$

$F(k)$ とおく

x の関数

k の関数

$f(x) \rightleftharpoons F(k)$ に変換するとき フーリエ変換

逆に、

$F(k) \rightleftharpoons f(x)$

”

フーリエ逆変換

という。

(3)

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \equiv \mathcal{F}[f(x)]$$

花文字の $\mathcal{F}$: フーリエ変換を意味する.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(k)]$$

(-1) で逆変換.

例) 教科書においては.

$$\left. \begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) \end{aligned} \right\} \text{と定義しているが、本質的に意味は同じ.}$$

で $F(k)$ とは?

$f(x)$ が e^{ikx} の波の成分をどれだけ含むかを表す. (一般に複素関数)

e^{ikx} : 平面波 : “波数 k で $+x$ 方向に進む波”

k : 波数 : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

k が小さい



k が大きい



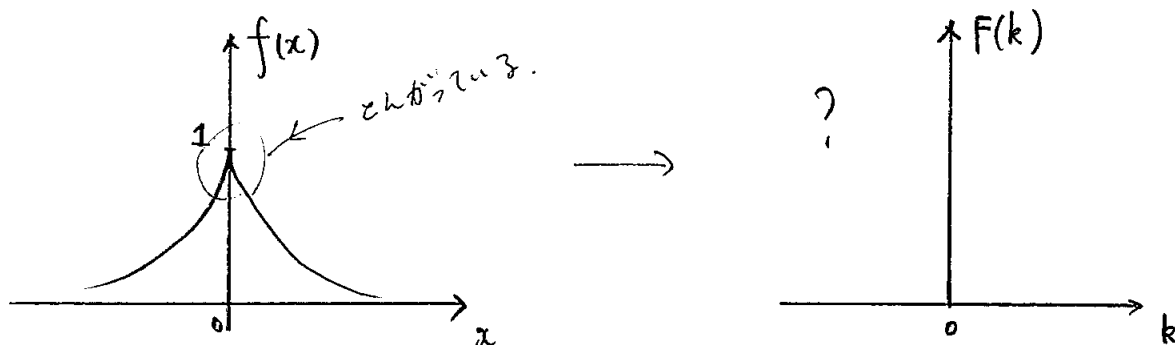
⑨ パワースペクトル

$$S(k) = |F(k)|^2$$

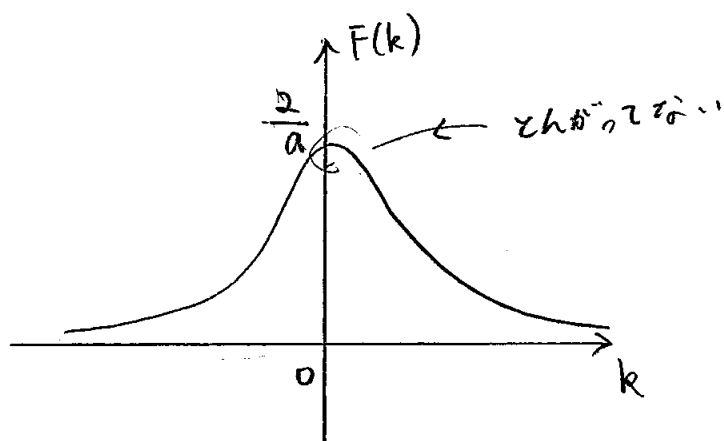
$f(x)$ にどれだけ強く、波数 k の波 e^{ikx} の成分が含まれているかを示す.

(4)

例) 関数 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$) の フーリエ変換



$$\begin{aligned}
 F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-|a|x} dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ax-ikx} dx + \int_{-\infty}^0 e^{+ax-ikx} dx \\
 &= \left[-\frac{e^{-ax-ikx}}{a+ik} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{ax-ikx}}{a-ik} \right]_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} \\
 &= \frac{2a}{a^2+k^2}
 \end{aligned}$$



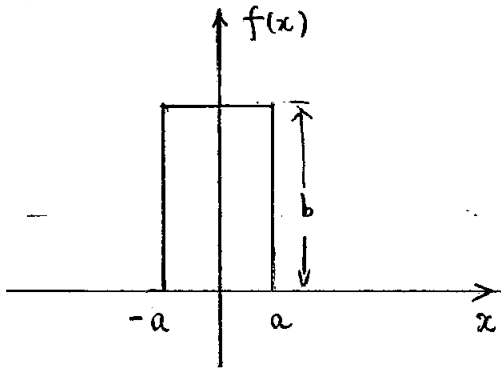
a を大くすると,

$f(x) \rightarrow$ 急しゅん

$F(k) \rightarrow$ 平たらかになる

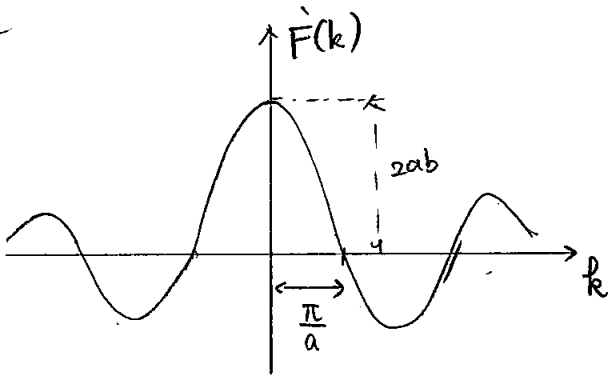
↑ 相関 してゐる.

例. パルス波



$$f(x) = \begin{cases} b & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \int_{-a}^a e^{-ikx} b dx \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_{-a}^a = -\frac{1}{ikb} (e^{-ika} - e^{ika}) = \frac{2b \sin ka}{k} \end{aligned}$$

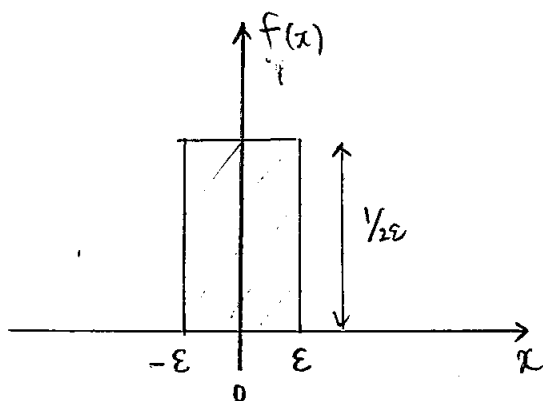


$f(x)$ の幅 $(2a)$ と $F(k)$ の幅 $(\frac{2\pi}{a})$ は、 a と $\frac{1}{a}$ の反比例。

▷ Dirac のデルタ関数

⑤

$a \rightarrow \varepsilon$, $b \rightarrow 1/2\varepsilon$ とおきなおす.



$$S = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon) = 1$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると、 ε のときの $f(x)$ を $\delta(x)$ とおくと、

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

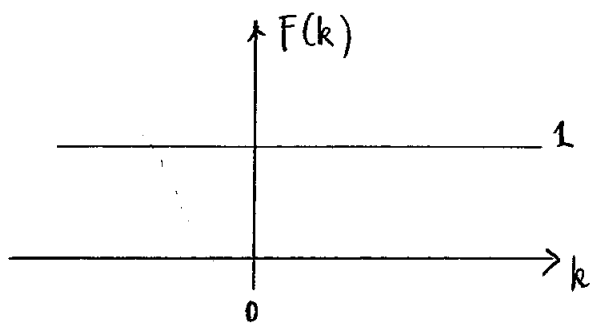
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$\delta(x)$ を Dirac のデルタ関数 と言う.

また、

$$F(k) = \frac{\sin k\varepsilon}{k\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 \text{ となり.}$$

あらゆる波数 k が同じ強さで含まれている.



その他 Delta 関数の性質

⑦

$$\textcircled{1} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\varphi(x)}_{\substack{\uparrow \\ \text{任意の関数}}} \delta(x) dx = \varphi(0)$$

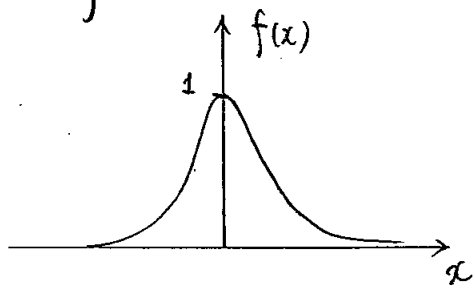
$$\textcircled{2} \quad \delta(x) = \delta(-x)$$

$$\textcircled{3} \quad x \delta(x) = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|} \quad a \neq 0$$

例) ガウス関数のフーリエ変換
(正規分布)

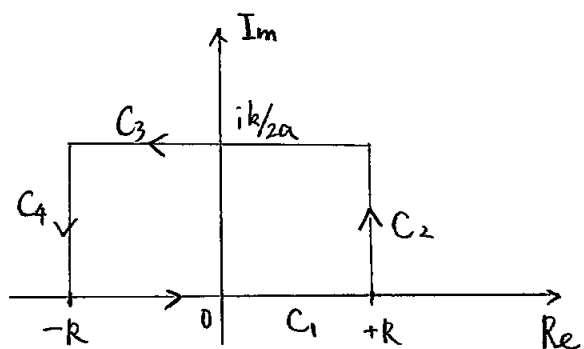
$$f(x) = e^{-ax^2} \quad a > 0$$



$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 - ikx} = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-a\left(x + \frac{ik}{2a}\right)^2 - \frac{k^2}{4a}}$$

$$z \equiv x + \frac{ik}{2a} \quad e^{-ikx} \text{ の積分で}$$

$$\int_{-\infty + ik/2a}^{+\infty + ik/2a} dz e^{-az^2}$$



左図のような積分経路を考えると

e^{-az^2} は正則 $\Rightarrow$ Cauchy の積分定理より

$$\int_C dz e^{-az^2} = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \right) dz e^{-az^2} = 0$$

$R \rightarrow \infty$ を考えると, ジョルダンの補題より C_2, C_4 上の積分は 0 になる。

よって C_3 と C_1 の積分の和が 0 になる

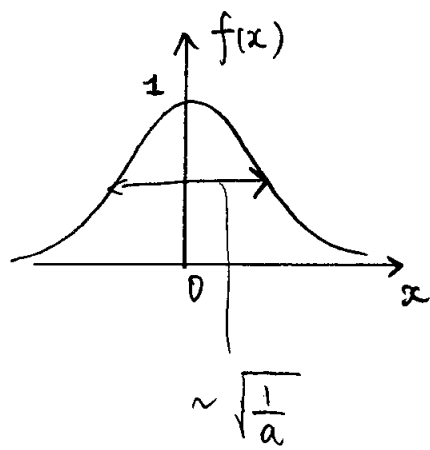
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} - \int_{-\infty + ik/2a}^{+\infty + ik/2a} dz e^{-az^2} = 0$$

よって

$$F(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

$\downarrow$
 $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ ($\because$ ガウス積分)

$\leftarrow$ $F(k)$ もガウス関数 !!



$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{F}[f]} \\ \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} \end{array}$$

