

(定理) 解の重ね合わせ. (線形性)

ある領域 R での偏微分方程式の任意の解 u_1, u_2 とすると.

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

その R 領域 R での解である。 c_1, c_2 は任意の定数。

(証明) ^{これは} $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を考える。

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0 \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (c_1 u_1 + c_2 u_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= c_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 + c_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_2 + c_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_1 + c_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2 \\ &= c_1 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}}_0 \right) + c_2 \left(\underbrace{\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}}_0 \right) \quad \leftarrow \\ &= 0 \end{aligned}$$

S

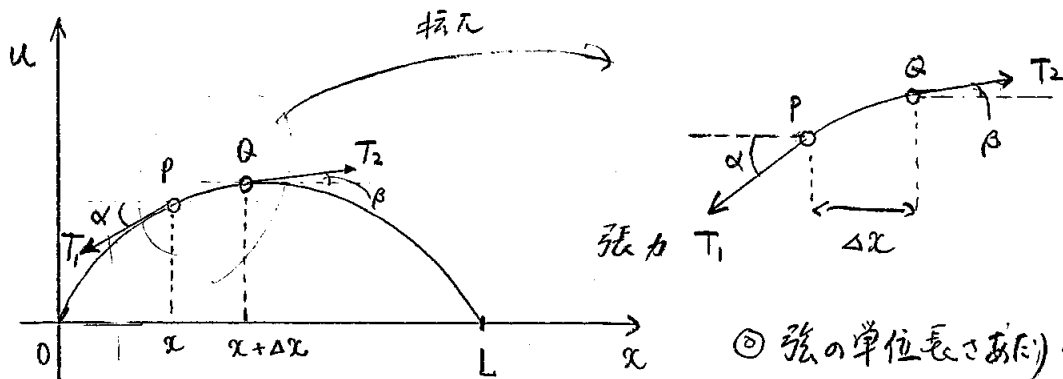
振動する弦. ~ 波動方程式 ~

 $x=0, L$ で固定された弦 (長さ L)時刻 t , 座標 x での弦の変位を $u(x, t)$

(仮定)

- ① 弦の単位長さ当りの質量は一定. 弦は弾性的で, 曲げに対する抵抗がない
- ② 重力は考えない. たわまない ← 両端でしっかり弦を引っ掛けて固定している
- ③ 弦は垂直面内で微小横運動をする. 弦の各点は, 厳密に垂直方向に動き, 各点における弦の変位と傾きの絶対値は小さい

(導出)

⑤ 弦の単位長さあたりの質量を ρ

水平方向 (運動しない)

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{一定} \quad \text{--- ①}$$

垂直方向

$$-T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①より} \quad T_1 = \frac{T}{\cos \alpha} \quad T_2 = \frac{T}{\cos \beta} \quad \rightarrow \text{②へ代入} \quad (T_1, T_2 \text{ を消去})$$

$$\text{②式に} \quad -T \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + T \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow -\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{--- ③}$$

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x$$

↑
x の傾き

$$\tan \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}$$

↑
(x) x + Δx の傾き.

③式を Δx で割る.

$$\frac{1}{\Delta x} \left[- \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

↓ Δx → 0

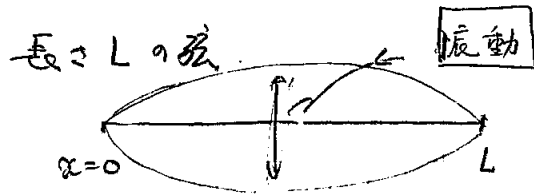
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

従って、

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad c^2 = \frac{T}{\rho}}$$

↑
1次元 波動方程式

一次元波動方程式の解.



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(x, t)$ は 弦の変位.

境界条件.

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (\forall t \text{ の時刻 } t \text{ に対して})$$

初期条件.

$$u(x, 0) = f(x) \quad \leftarrow \text{初期変位.}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \quad \leftarrow \text{初速度.}$$

Step 1 : 変数分離法

偏微分方程式 $\rightarrow$ 2つの常微分方程式.

$$u(x, t) = F(x) G(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \ddot{G} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F'' G \quad \text{より}$$

$$F \ddot{G} = c^2 F'' G$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k \text{ (定数)} \right)$$

$\therefore$ 左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数.

もし t (または x) の値を変えれば、左辺(右辺)のみの値が変わり、右辺(左辺)は変わらないから

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{G} - c^2 k G = 0 \\ F'' - k F = 0 \end{cases}$$

k : 任意の定数

Step. 2 境界条件を課す

$$\begin{aligned} u(0, t) &= F(0) G(t) = 0 \\ u(L, t) &= F(L) G(t) = 0 \end{aligned} \quad \forall t$$

[1] $F'' - kF = 0$ を解く

$u(x, t) = F(x) G(t)$ として $G(t) \equiv 0$ としても $u=0$ となる。
明らかに意味のない解 $\rightarrow G \neq 0$ と仮定。

$$F(0) = 0, \quad F(L) = 0$$

① $k=0$ のとき $F''=0$ として $F=ax+b$

$$F(0) = b = 0, \quad F(L) = aL + b = 0 \quad \text{として} \quad a=0.$$

$F=0$ となり、 $u=0$ となるので、除外する。

② $k>0$ のとき $k=\mu^2$ とおくと一般解は

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

$$\begin{aligned} F(0) &= A+B=0 \\ \rightarrow B &= -A \end{aligned} \quad F(L) = Ae^{\mu L} + Be^{-\mu L} = 0$$

$$\hookrightarrow A(e^{\mu L} - e^{-\mu L}) = 0$$

$$2A \sinh \mu L = 0$$

$$A \neq 0 \quad \text{として} \quad \mu L = 0$$

$$L \neq 0 \quad \text{として} \quad \mu = 0$$

結局、 $F=0$ となり、不適。

③ $k < 0$ のとき、 $k = -p^2$ とおく。

$$F'' + p^2 F = 0 \quad \text{となり}$$

一般解は、

$$F(x) = \tilde{A}e^{ipx} + \tilde{B}e^{-ipx} \\ = A \cos px + B \sin px$$

とかける。

$$F(0) = A = 0$$

$$F(L) = B \sin pL = 0$$

$$B \neq 0 \text{ より } pL = n\pi \quad n \text{ は 整数.}$$

$$\boxed{p = \frac{n}{L}\pi}$$

$\therefore F(x)$ は、無限個の解をもち、

$$\boxed{F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n}{L}\pi x\right) \quad (n=1, 2, 3, \dots)}$$

とかける。

③ $n=0$ は、不適

$$n = -1, -2, \dots, -\infty \text{ は、 } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \text{ となり}$$

$-n$ と n の解は、同じな n で除外。

[2] $\ddot{G} - c^2 k G = 0$ を解く.

Fの場合と同様に

$c^2 k = -\omega^2$ とおくと.

$\ddot{G} + \omega^2 G = 0$

また, $\omega_n^2 = -c^2 k = \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2$ より

$\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$

一般解は.

$G_n(t) = \tilde{A}_n e^{i\omega_n t} + \tilde{B}_n e^{-i\omega_n t}$

$= (A_n + B_n) \cos \omega_n t + i(A_n - B_n) \sin \omega_n t$

$\equiv C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t$

$\begin{cases} C_n = A_n + B_n \\ D_n = i(A_n - B_n) \end{cases}$ とおいた.

となる.

したがって, 関数 $u_n(x, t) = F_n(x) G_n(t)$ は,

$u_n(x, t) = \left(C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t \right) B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$

$A_n \equiv C_n B_n, \quad B_n \equiv D_n B_n$ と定義しなおすと.

$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$
 $(n=1, 2, 3, \dots)$

(弦の) 固有関数 (又は, 特性関数) といふ $\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$ は, 固有値.
 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ の集合をスペクトル と呼ぶ. (又は 特性値)

cf.

$F'' + p^2 F = 0$

$\rightarrow F(x) = A \cos px + B \sin px$

$p = \frac{n\pi}{L}$

$k = -p^2$ より

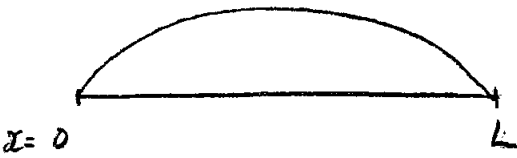
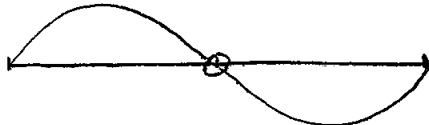
$k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

⑤ 固有関数 n について

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$$

$$\text{振動数 } f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L}$$

$$(c^2 = \frac{T}{\rho})$$

$n=1$		節 2 個 L	f_n $\frac{c}{2L}$
$n=2$		節 3 個 $1/2$	$\frac{2c}{2L}$
$n=3$		節 4 個 $2/3$	$\frac{3c}{2L}$

各運動のことを標準モード (normal mode) といい、

n 番目の運動を 第 n 標準モード とよぶ。

特に $n=1$ の運動を 基本モード という

Step 3. 一般解の構成

単一解 $u_n(x, t)$ には、一般に初期条件を満足できない。
(ただし n の)

→ 波動方程式は線形かつ同次
問題の

→ 有限個の $u_n(x, t)$ の重ね合わせも解である。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$
$$\left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L} \right)$$

を解として考える。係数 A_n, B_n が求められるなら、それが解である。

① 初期条件の適用: $u(x, 0) = f(x)$ (初期変位)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

$u(x, 0)$ が $f(x)$ のフーリエ級数に展開できればよい。

$$\rightarrow A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \quad n=1, 2, \dots$$

② 初期速度 $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-A \omega_n \sin \omega_n t + B \omega_n \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \right]_{t=0}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{B \omega_n} \sin \frac{n\pi}{L} x = g(x)$$

↑
これはフーリエ係数と見たてると

$$B \omega_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\omega_n = \frac{cn\pi}{L} \quad \text{of } a z''$$

$$\rightarrow B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx. \quad (n=1, 2, \dots)$$