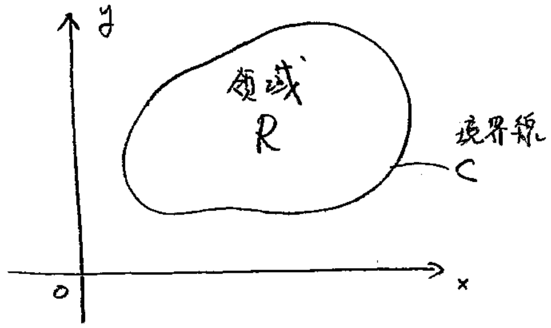
§ 定常な2次元熱流

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

定常状態 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{\nabla^2 u = 0}$ (Laplace eq.)



問題は……

(1) xy 平面上の領域 R で (ラプラス)方程式 を満たす u を求める.

(2) R の境界線 C で与えられる境界条件を満たすように解を定める.

境界値問題

① ディリクレの問題

u が 境界線 C で与えられる.

② ノイマン の 問題

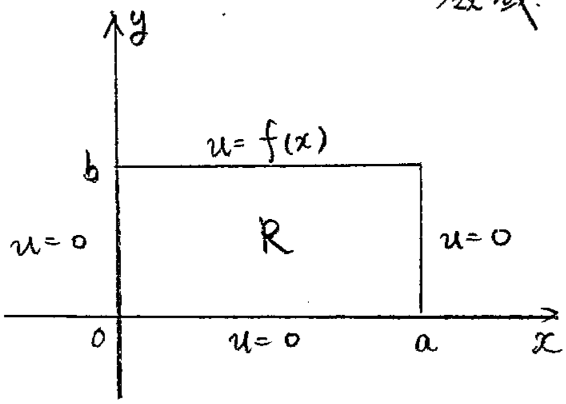
法線導関数 $u_n = \frac{\partial u}{\partial n}$ が C で 与えられている

③ 混合問題

u が C の一部で与えられ, 残りの部分で u_n が与えられている.

▷ 長方形Rでのディリクレ問題

領域: 長方形 R



Rの上辺の温度 $u(x,y)$ は $f(x)$
残りの3辺は、温度を0と仮定

ディリクレ問題

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u = u(x, y)$$

▷▷ 変数分離法で固有関数を求める

$$u(x,y) = F(x)\,G(y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} G + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0$$

両辺を FG で割る

$$\frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \text{定数} = -k$$

① $F'' - kF = 0$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + kF = 0 \qquad F(0) = F(a) = 0$$

$$F(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$F(0) = A = 0, \qquad F(a) = B\sin\lambda a = 0 \to \lambda a = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}$$

$$n = 1, 2, \cdots$$

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

② $\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0$

$$G(y) = G_n(y) = C_n e^{n\pi y/a} + D_n e^{-n\pi y/a}$$

下端で $u=0$ より $G_n(0)=0$
$(y=0)$

$$G_n(0) = C_n + D_n = 0 \quad \therefore D_n = -C_n$$

$$G_n(y) = C_n\left(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}\right)$$
$$= 2C_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

まとめると

$$u_n(x,y) = F(x)G(y) = 2B_nC_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

あらためて、A_nとおく.

$$\Rightarrow \quad u_n(x,y) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

▷ 上端の境界条件を満たすように解を構成

$u(x,b) = f(x)$ を満たすように

$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$ と解を構成する

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$
$$= \underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)}$$

フーリエ変換の形になっている.

$$b_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx.$$

まとめると、

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi}{a}y$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

5 熱伝導方程式 ： 無限に長い系 〜フーリエ積分変換による解〜

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

温度の局所的な変化を記述

系の形や大きさなどは、境界条件によって決まる。

▷ 無限に長い棒 を考える

- ✓ 境界条件 ： $x \to \pm\infty$ で $u = 0$
- ✓ 初期条件 ： $u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$

▷ Fourier 変換を使って解く

ここでは、$u(x,t)$ を x に関してのみフーリエ変換する

$$\to \quad U(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u(x,t) e^{-ikx}$$

▷▷ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ のフーリエ変換　　部分積分を2回

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-ikx} = (-ik)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; u \, e^{-ikx}$$

$$= -k^2 U(k,t)$$

したがって、$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ のフーリエ変換は

$$\frac{\partial}{\partial t} U(k,t) = -c^2 k^2 U(k,t)$$

$U(k,t)$ の 1階の 微分方程式

$$\Rightarrow \quad U(k,t) = A_k e^{-c^2 k^2 t}$$

▷ 初期条件のフーリエ変換

$$U(k,0)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\, u(x,0)\,e^{-ikx}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\, f(x)\,e^{-ikx}\equiv F(k) \text{ とする}$$

また、微分方程式の解 $(t=0)$ から

$U(k,0)=A_k$ なので、 $F(k)=A_k$

したがって、

$$U(k,t)=F(k)\,e^{-c^2k^2t}$$

これをフーリエ逆変換すれば、解 $u(x,t)$ が求まる

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, U(k,t)\,e^{ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\, F(k)\,e^{-c^2k^2t+ikx}$$

$F(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,f(x')\,e^{-ikx'}$ を代入

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\left(\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,f(x')\,e^{-ikx'}\right)e^{-c^2k^2t+ikx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,f(x')\,e^{-c^2k^2t+ik(x-x')}$$

kについての積分を実行するために、以下のようにまとめる

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\,f(x')\left[\int_{-\infty}^{\infty}dk\,e^{-c^2t\,k^2+i(x-x')k}\right]$$

$$[\cdots] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-c^2 t \left(k - i\frac{x-x'}{2c^2 t}\right)^2}}_{\text{ガウス積分}\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4c^2 t}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{c^2 t}}\; e^{-\frac{(x-x')^2}{4c^2 t}}$$

したがって．

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, f(x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4c^2 t}}$$

と求まる。

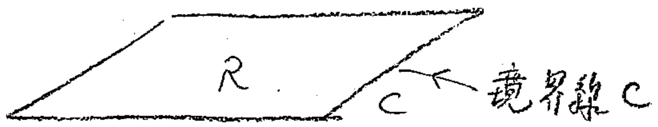
5 振動する膜 : 2次元波動方程式

太鼓の面、水面の波など…

物理学上の仮定

① 膜の単位面積あたりの質量は一定(均質な膜)
膜は完全にたわみ、曲げに対する抵抗はない

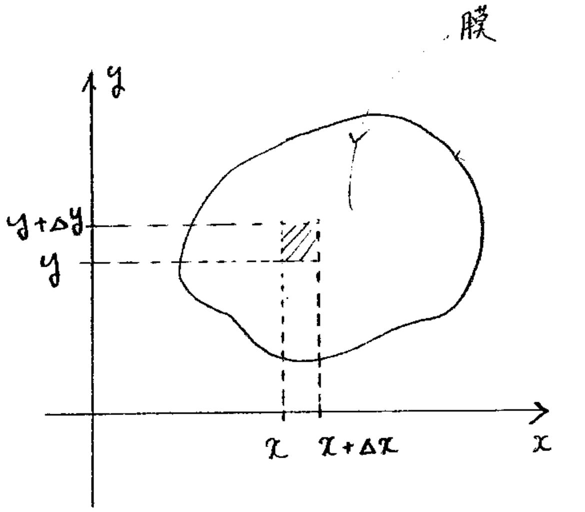
② 膜は、境界線(C)に沿って、完全に固定されている



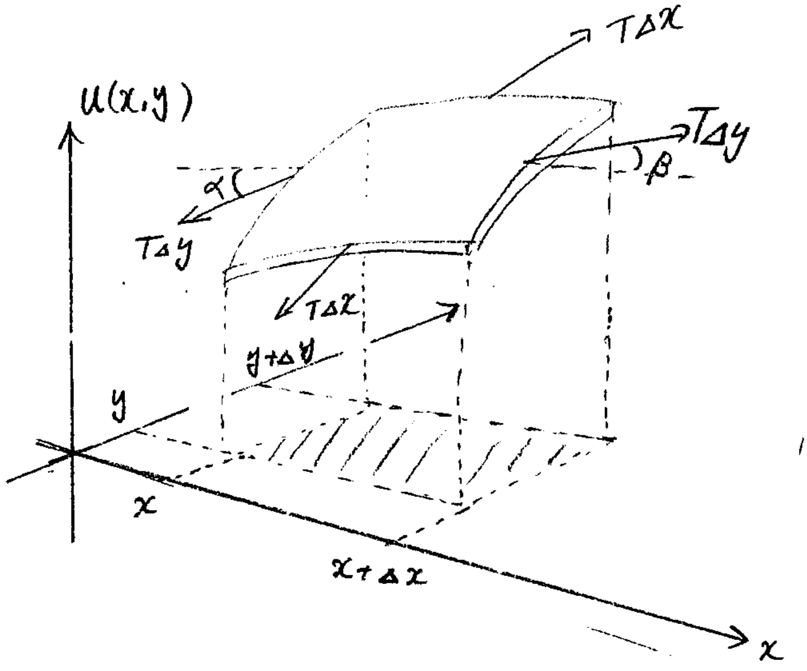
膜を張ることによる張力が生じるが、単位長さあたりの張力Tは、すべての点で、すべての方向に等しく、運動の途中で変化しない

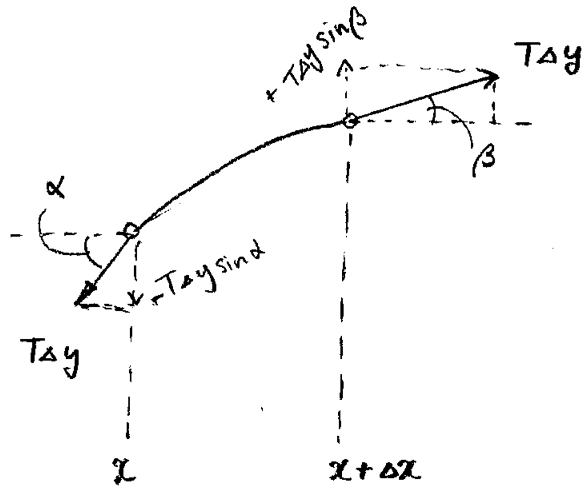
③ 膜の変位 $u(x, y, t)$ は、膜の寸法に比べて十分小さい

導出



膜の微小部分 $\Delta x \Delta y$ に着目





$c^2 \equiv \dfrac{T}{\rho}$ とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$\nabla^2 = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$