§5 調和振動子 再び

ハミルトニアン

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2m}(p^2 + m^2\omega^2x^2)$$

$$= \frac{1}{2m}(p + im\omega x)(p - im\omega x)$$

量子化条件

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\hbar$$

ここで、次の演算子を導入する.

$$\begin{cases} \hat{a} = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} - im\omega\hat{x}) \\ \hat{a}^\dagger = \dfrac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(\hat{p} + im\omega\hat{x}) \end{cases}$$

$$aa^\dagger = \frac{1}{2m\hbar\omega}(\hat{p} - im\omega\hat{x})(\hat{p} + im\omega\hat{x})$$

$$= \frac{1}{2m\hbar\omega}\left\{\underline{\hat{p}^2 + m^2\omega^2\hat{x}^2} - im\omega[\hat{x}, \hat{p}]\right\}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{i}{2\hbar}\underbrace{[\hat{x}, \hat{p}]}_{= i\hbar}$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}$$

同様にして、

$$a^\dagger a = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}$$

従って

$$\begin{cases} \hat{H} = \hbar\omega\left(a^{+}a + \frac{1}{2}\right) \\ a a^{+} - a^{+}a = 1 \end{cases}$$ と書ける。

▷ エネルギー固有値の下限

$\hat{H}$の固有状態を$|\mu\rangle$とすると

$$\hat{H}|\mu\rangle = E_\mu|\mu\rangle$$

$$\langle\mu|\hbar\omega\,\hat{a}^{+}\hat{a}|\mu\rangle = \langle\mu|\overbrace{\hat{H}|\mu\rangle}^{\to E_\mu|\mu\rangle} - \frac{1}{2}\hbar\omega\langle\mu|\hat{H}|\mu\rangle$$

$$a^{+}a = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(E_\mu - \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\langle\mu|\mu\rangle$$

$$= E_\mu - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

一方 左辺は

$$\langle\mu|\hbar\omega\,\hat{a}^{+}\hat{a}|\mu\rangle = \hbar\omega\underbrace{\left(\langle\mu|a^{+}\right)\left(a|\mu\rangle\right)}_{a|\mu\rangle\text{のノルムになっている}} \geq 0$$

等号は $a|\mu\rangle = 0$ のときのみ。

従って $E_\mu \geq \frac{1}{2}\hbar\omega$

▷ lowering operator（下降演算子，消滅演算子）

ある固有状態 $|\mu\rangle$ に対して $a|\mu\rangle$ を考える.

$$\begin{cases} \hbar\omega\,\hat{a}\hat{a}^{\dagger} = \hat{H} + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ \hbar\omega\,\hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega \end{cases}$$ より

$$\hbar\omega\,\hat{a}\cdot\hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \hat{H}\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\,\hat{a}$$

$$\hbar\omega\,\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger}\hat{a} = \hat{a}\hat{H} - \frac{1}{2}\hbar\omega\,\hat{a}$$

$\therefore\ \hat{a}\hat{H} - \hat{H}\hat{a} = [\hat{H}, \hat{a}] = \hbar\omega\,\hat{a}$ となるので

$$\hat{a}\underbrace{\hat{H}|\mu\rangle}_{E_\mu|\mu\rangle} - \hat{H}\hat{a}|\mu\rangle = \hbar\omega\,\hat{a}|\mu\rangle$$

$$\Rightarrow\quad \hat{H}\hat{a}|\mu\rangle = (E_\mu - \hbar\omega)\,\hat{a}|\mu\rangle$$

つまり，$\boxed{\hat{a}|\mu\rangle}$ という状態は固有値 $\boxed{E_\mu - \hbar\omega}$ をもつ

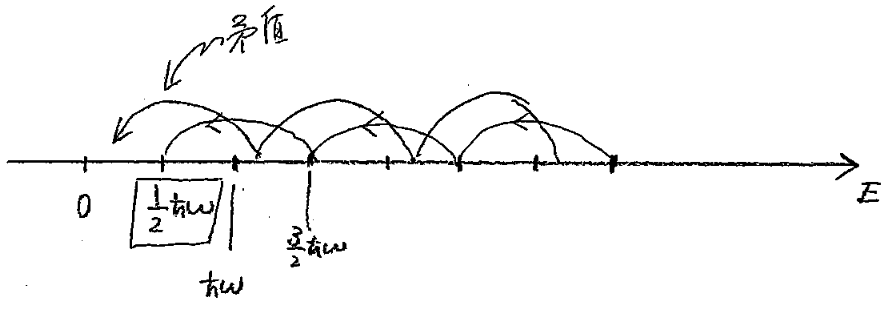
固有状態になっている。

これを繰り返すと，

E_μ, $E_\mu - \hbar\omega$, $E_\mu - 2\hbar\omega$, ...

という固有値の系列が得られるが

これは，いつか $\frac{1}{2}\hbar\omega$ になって終了せねばならない



上昇演算子

▷ raising operator（生成演算子）

一方 $a^\dagger|\mu\rangle$ を考える.

$$\begin{cases} \hbar\omega\, a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger H + \frac{1}{2}\hbar\omega a^\dagger \\ \hbar\omega\, a^\dagger a a^\dagger = H a^\dagger - \frac{1}{2}\hbar\omega a^\dagger \end{cases}$$

$$a^\dagger H - H a^\dagger = [a^\dagger, H] = -\hbar\omega a^\dagger$$

$$a^\dagger \underbrace{H|\mu\rangle}_{E_\mu|\mu\rangle} - H a^\dagger|\mu\rangle = -\hbar\omega\, a^\dagger|\mu\rangle$$

$$\therefore\ H a^\dagger|\mu\rangle = (E_\mu + \hbar\omega)\, a^\dagger|\mu\rangle$$

つまり $\boxed{a^\dagger|\mu\rangle}$ は 固有値 $E_\mu + \hbar\omega$ をもつ固有状態になっている

これを繰り返すと.

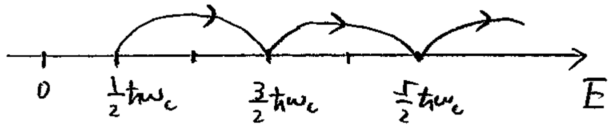
$$E_\mu,\ E_\mu + \hbar\omega,\ E_\mu + 2\hbar\omega \cdots$$

という固有値の系列が得られる.

以上をまとめると、

最低固有値は $\frac{1}{2}\hbar\omega$

その固有状態を $|0\rangle$ と書くと、



$$|0\rangle,\quad a^+|0\rangle,\quad (a^+)^2|0\rangle,\quad \cdots\cdots,\ (a^+)^n|0\rangle,\ \cdots\cdots$$

が完全系を作ってると考えられる。

ここで、$|0\rangle$ は　$a|0\rangle=0$　として　定義される。

実際、

$$a(a^+)^n|0\rangle$$

$$=\boxed{a\ a^+}\underbrace{\cdots\cdots a^+}_{n個}|0\rangle$$

$[a,a^+]=aa^+-a^+a=1$ より

$aa^+=1+a^+a$

$$=\underbrace{a^+\cdots\cdots a^+}_{(n-1)個}|0\rangle + a^+\cdot\boxed{a\cdot a^+}\underbrace{\cdots\cdots a^+}_{(n-1)個}|0\rangle$$

$$=2\underbrace{a^+\cdots\cdots a^+}_{(n-1)個}|0\rangle + a^+a^+\cdot a\underbrace{a^+\cdots\cdots a^+}_{(n-2)個}|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$=n(a^+)^{n-1}|0\rangle$$

つまり、aは、上の完全系で、1つ前の状態に戻す演算になっている。

注)　$a(a^+)^n|0\rangle = n(a^+)^{n-1}|0\rangle$

整数の微分公式に似てる。

規格化.

$(a^\dagger)^n|0\rangle$ の ノルムを考えよう.

$$\underbrace{a^\dagger\cdots\cdots a^\dagger}_{n個}|0\rangle \xleftrightarrow[\text{共役}]{\text{エルミート}} \langle 0|\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n個}$$

$$\therefore\ \langle 0|a^n\cdot(a^\dagger)^n|0\rangle = \langle 0|a\cdots\cdots\underbrace{a\cdot a^\dagger\cdots\cdots a^\dagger|0\rangle}$$

$$a(a^\dagger)^n|0\rangle = n(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle$$

$$= n\langle 0|\underbrace{a\cdots\cdots a}_{(n-1)個}\underbrace{a^\dagger\cdots\cdots a^\dagger}_{(n-1)個}|0\rangle$$

$$= n(n-1)\langle 0|\underbrace{a\cdots a}_{(n-2)個}\ \underbrace{a^\dagger\cdots a^\dagger}_{(n-2)個}|0\rangle$$

$$= n!\langle 0|0\rangle$$

$$= n!$$

$$\therefore\quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$$

以上で使ったのは

$$\begin{cases}\hat{H} = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\\ [a, a^\dagger] = 1\end{cases}$$

のみである.

励起状態の w.f.

$$\langle x | \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{p} + im\omega\hat{x}) | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \cdot \left(-i\hbar \frac{d}{dx} + im\omega x \right) \langle x | 0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \ i \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

一般に

$$\langle x | (a^{+})^n | 0 \rangle = \frac{1}{(2m\hbar\omega)^{n/2}} \, i^n \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(-\hbar \frac{d}{dx} + m\omega x \right)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$e^{i\frac{\pi}{2}n}$ ： 位相因子.

規格化するには $\frac{1}{\sqrt{n!}}$ をかければよい.

座標表示での波動関数

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

$$\downarrow$$

$$(\hat{p} - im\omega\hat{x})|0\rangle = 0$$

座標表示 $|x\rangle$との内積をとると

$$\langle x|\hat{p}|0\rangle - im\omega\langle x|\hat{x}|0\rangle = 0$$

$\int dx'|x'\rangle\langle x'| = 1$ $\int dx'|x'\rangle\langle x'| = 1$

$$\therefore \int dx' \underbrace{\langle x|\hat{p}|x'\rangle}_{-i\hbar\frac{d}{dx}\delta(x-x')} \underbrace{\langle x'|0\rangle}_{\text{基底状態の w.f.}} = im\omega\int dx' \underbrace{\langle x|\hat{x}|x'\rangle}_{x\delta(x-x')}\langle x'|0\rangle$$

$$-i\hbar\frac{d}{dx}\langle x|0\rangle = im\omega\, x\langle x|0\rangle$$

$$\psi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle = A e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

$\therefore$ 規格化

$$\langle 0|0\rangle = \int dx\,\langle 0|x\rangle\langle x|0\rangle$$

$$= |A|^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$$

$$= |A|^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, e^{-\xi^2}} \to \sqrt{\pi}$$

$$\therefore \langle 0|0\rangle = |A|^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{m\omega}} = 1 \quad \text{より} \quad A = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

$$\langle x|0\rangle = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right]$$