§ べき級数法

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots}_{\text{べき級数}}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \qquad |x|<1,\ \text{等比級数}$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

▷ べき級数を使って微分方程式を解く.

例). $y' - y = 0$ を解く.

解を. 未知係数のべき級数と仮定

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$$

両辺の微分をとると

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y' - y = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots\cdots) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots\cdots = 0$$

各項の係数は. 全てゼロになればよい

$$a_1 - a_0 = 0, \quad 2a_2 - a_1 = 0, \quad 3a_3 - a_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = a_0 \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}, \cdots\cdots$$

▷ 例2

$$y' = 2xy$$

$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots$ とおくと、

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

y と y' を与式へ代入。

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \cdots\cdots$$
$$= \quad 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + 2a_4 x^5 + \cdots\cdots$$

x の各次ごとに係数比較

$$a_1 = 0 \qquad 2a_2 = 2a_0 \qquad 3a_3 = 2a_1 \qquad 4a_4 = 2a_2$$
$$5a_5 = 2a_3 \qquad 6a_6 = 2a_4$$

$a_1 = 0$ から、 $a_3 = 0$, $a_5 = 0$, $\cdots\cdots$

また、

$$a_2 = a_0 \qquad a_4 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}a_0 \qquad a_6 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3!}a_0$$

したがって

$$y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \cdots\cdots\right)$$
$$= a_0 e^{x^2}$$

▷ 例3

$$y'' + y = 0$$

$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ とおくと、

$$\left.\begin{aligned} y' &= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} \\ y'' &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} \end{aligned}\right\}$$ となるので、

$$\boxed{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

mについての和をそろえる必要あり

↓ m−2 を m とおきなおす.

$$\boxed{\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{\underbrace{(m+2)(m+1) a_{m+2} + a_m}_{=0}\} x^m = 0$$

$$a_{m+2} = \frac{-1}{(m+2)(m+1)} a_m$$

m = 奇数のとき.

a_1

$$a_3 = \frac{-a_1}{3\cdot 2} = \frac{-1}{3!} a_1$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{5\cdot 4} = \frac{(-1)^2}{5!} a_1$$

$\vdots$

$$a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_1$$

$(p = 0, 1, 2, \cdots)$

m = 偶数

a_0

$$a_2 = \frac{-1}{2\cdot 1} a_0$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4\cdot 3} = \frac{(-1)^2}{4!} a_0$$

$\vdots$

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0$$

$(p = 0, 1, 2, \cdots)$

まとめると、

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} a_1 x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} a_0 x^{2p}$$

$\Downarrow$ 展開してみると、

$$= a_1 \underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \right)}_{\Downarrow \ \sin(x)} + a_0 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \right)}_{\Downarrow \ \cos(x)}$$

$$= a_1 \sin x + a_0 \cos x$$

$$\Rightarrow \quad y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

▷ べき級数の収束性

Ⓠ どのような場合に収束？
そもそも収束って何だっけ？

中心 $x=x_0$ のべき級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \qquad (1)$$

第 n 次までの部分和 $S_n(x)$ を定義する

$$S_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

また、S_n をべき級数(1)から除いた残りは、

$$R_n(x) = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \cdots \qquad (3)$$

剰余という

ある $x=x_1$ について、部分和が収束する場合、つまり、

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_1) = S(x_1)$$

のとき、べき級数 (1) が収束するという。

このとき、$S(x_1)$ を $x=x_1$ における値、または和という

$$S(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$$

と書く

収束する場合には、すべての n に対して、

$$S(x_1) = S_n(x_1) + R_n(x_1)$$

が成り立つ。

もし、$x=x_1$ で、部分和が発散するなら、べき級数は発散する。

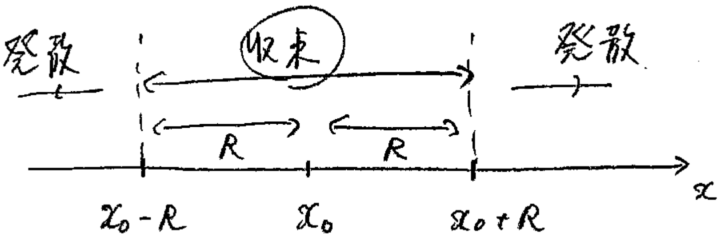
▷ べき級数の収束性

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

収束半径 R ← 詳細は、昨年の物理数学Ⅰ 参照.

① $$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|$$

② $$\frac{1}{R} = \lim \sqrt[m]{|a_m|}.$$



例

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^m + \cdots$$

全ての m について、$a_m = 1$ なので

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty} 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 1}$$

$|x| < 1$ で 収束

例

$$e^x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m+1} \longrightarrow 0$$

$R=\infty$ となり、全ての x で与式のべき級数は収束.