物理数学I. －複素関数論－

§0. 高校数学から復習

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$\rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{-2}$

ここで、 $i^2 = -1$ となる"数" i を導入すれば

$$\rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{-2i^2}$$
$$= -1 \pm \sqrt{2}\,i \qquad \text{虚数解}$$

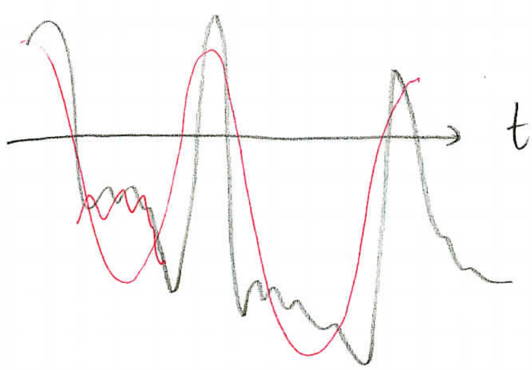
Question:

メリットは？ $\qquad i^2 = -1$

① 役に立つ。

フーリエ解析

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \underbrace{f(t)}_{\text{信号}}\, dt$$



② 物理現象の記述

古典力学 $\vec{F} = m\vec{a}$

量子力学 $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\cdots\cdots) \psi$ (Schrödinger 方程式).

これがないとミクロの世界を記述できない.

③ 数学的に美しい.

$\boxed{e^{i\pi} = -1.}$ (オイラーの公式の例) ← Feynman が特に美しい公式といってた.

$e, \pi, 1$, が i で関係づけられる.

④ 実積分が簡単に実行できる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = ?$$

§1. 複素数　複素平面
オイラーの公式

§1.1. 複素数

▷ 計算規則

〜 実数の場合と同じ．　加減乗算できる

例．
$$(1-i)(2+i)$$
$$= 2 + i - 2i - \underbrace{i^2}_{-1}$$
$$= 2 - i + 1$$
$$= 3 - i$$ 　$\boxed{\text{stop}}$

$a+bi$ の形で stop

例．
$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{1+i}{1+\cancel{i}-\cancel{i}+1}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

▷ 定義

$a, b \in \mathbb{R}$ （実数の集合）

に対して，$a+bi$ を <u>複素数</u>と呼ぶ （集合：$\mathbb{C}$）

▷ 記号

$z = a + bi$ に対して、

① $\underline{\mathrm{Re}}(z) = a$

real part (実部)

同様に

$\underline{\mathrm{Im}}(z) = b$

Imaginary part (虚部)

② $\bar{z} = a - bi$

を z の共役とよぶ　(complex conjugate)

conjugate

③ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(\in \mathbb{R})$

を絶対値と呼ぶ　absolute value

例. $z = 2 + 3i$

(1) $\mathrm{Re}(z) = 2$　　$\mathrm{Im}(z) = 3$

(2) $\bar{z} = 2 - 3i$

(3) $|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

▷ 性質

(1) 複素数の大小は比較できない！

$z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\cancel{z_1 < z_2}$

ok　　ok

例. $0 < i$ とする.

→ "両辺に1をたす"

$1 < 1 + i$

→ i をかけて

$i < i - 1$

→ $1 < 0$??? 矛盾.

(2) $z = a + bi$ に対して.

$$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} + b^2$$
$$= a^2 + b^2$$
$$= |z|^2.$$

ゆえに $\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$ ①

(3) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ に興味がある　　$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$?

$\begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases}$ とおく.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)}$$
$$= \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)}$$
$$= (ac - bd) - i(ad + bc)$$

一方,

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_1 = (a - bi)(c - di)$$
$$= (ac - bd) - i(ad + bc)$$

ゆえに. $\boxed{\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}$ ② "積"と"共役"が交換する。

(4)

$|z_1 z_2|$ について？

$$|z_1 z_2| \underset{①}{=} \sqrt{(z_1 z_2)\cdot(\overline{z_1 z_2})}$$

$$\underset{②}{=} \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}}$$

$$= \sqrt{|z_1|^2 \cdot |z_2|^2}$$

$$= |z_1| \cdot |z_2|$$

ゆえに、 $\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$ ③

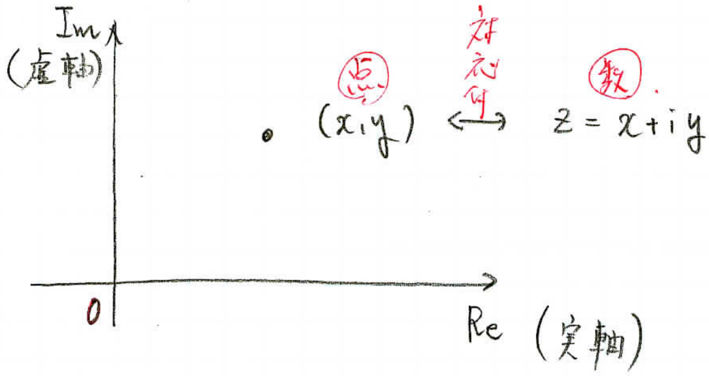
問　次の関係式を示せ

(1) $|z| = |\overline{z}|$

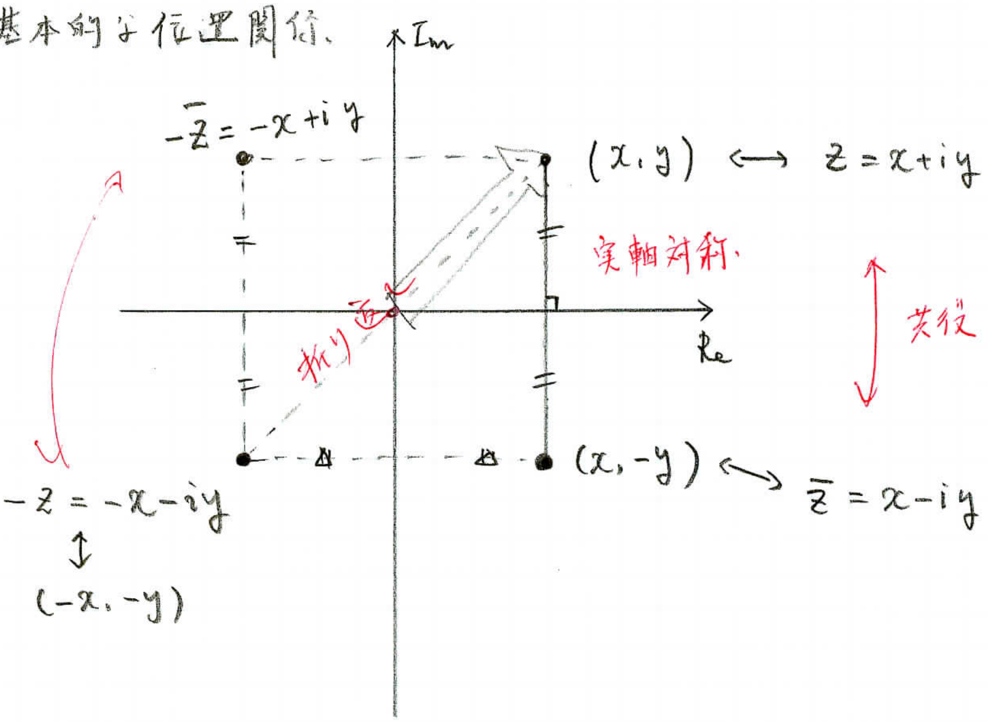
(2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

§1.2 複素平面

$z = x + iy$ の (x, y) を平面上の1点とみなす。



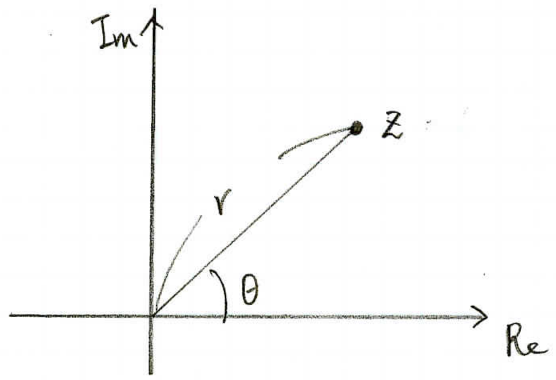
▷ 基本的な位置関係



複素数を矢印の長さ、向きで指定する
ベクトル

▷ 極座標表示

次のように
長さ r、 向き θ とする。



このとき、

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ なので、

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

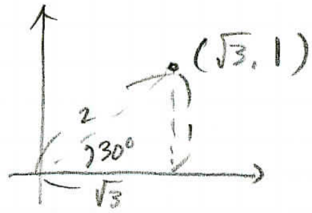
つまり

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$ (r, θ)で指定する。

を　zの極座標表示とよぶ

問　$z=\sqrt{3}+i$　を　極座標表示にせよ

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$



(注)

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}$$

$$= r$$　$\boxed{長さ = 絶対値}$

$$z = \sqrt{a^2+b^2}$$

▷ メリット？

例)　$|z_1| = |z_2| = 1$の　積

$$\begin{cases} z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1 \\ z_2 = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2 \end{cases}$$ とおく

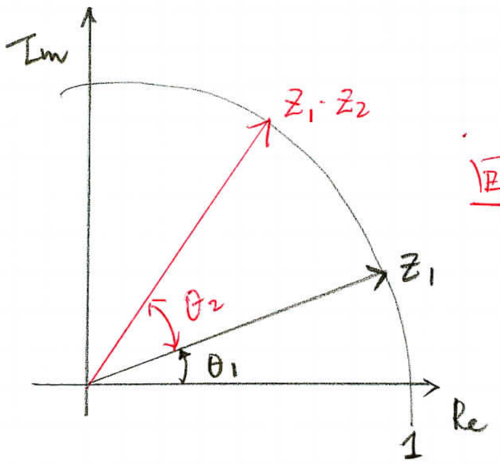
$$z_1 \cdot z_2 = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\overset{積}{}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

$$= \cos(\theta_1 \underline{+} \theta_2) + i\sin(\theta_1 \underline{+} \theta_2)$$

和

☆ 積が和になる。



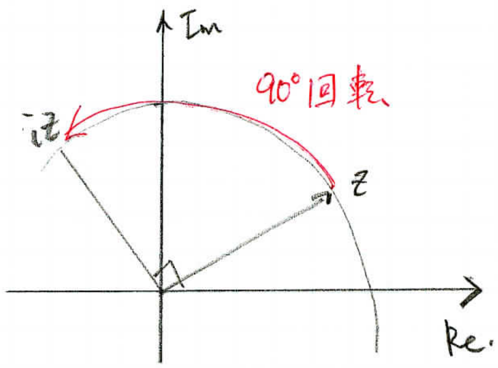
回転

つまり、

z_1 に z_2 をかける
||
z_1 を θ_2 回転する

$\boxed{\cos\theta + i\sin\theta \text{ をかける} \;=\; \theta \text{ 回転}}$

特に、
"i" をかける
||
90° 回転



問

$$\frac{z_1}{z_2} = ?$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

割り算は逆回転

(注)

$f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ とすると.

$$f(\theta_1) \cdot f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2)$$

指数関数

$$e^{\theta_1} \, e^{\theta_2} = e^{\theta_1 + \theta_2}$$