§2.2 複素関数の微分

実関数の場合の定義

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad x\in\mathbb{R},\ h\in\mathbb{R}$$

複素関数の場合

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \quad z\in\mathbb{C},\ h\in\mathbb{C}$$

これらの極限が一意に定まるとき、fの微分と呼ぶ

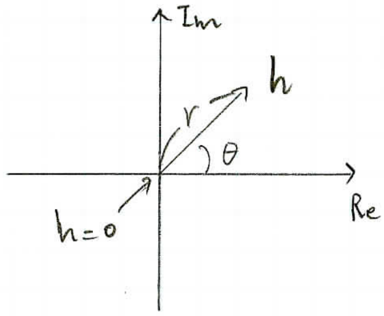
(注)

$h\in\mathbb{C}$について、$h\to 0$とは？

$h = h_1 + ih_2$としたとき、$h_1\to 0$, $h_2 \to 0$

$\Leftrightarrow$

$h = re^{i\theta}$とするとき、$r\to 0$.



"極座標なら
θにかかわらず、$r\to 0$で
$h\to 0$になる"

例

$$f(z) = z^2$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2zh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2z + h) = 2z.$$

ゆえに、$\frac{df}{dz} = 2z$

例 $f(z) = |z|^2 = z\cdot\bar{z}$

予想、$\frac{df}{dz} = 2|z|$?

$\to \bar{z}+\bar{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)(\overline{z+h}) - z\cdot\bar{z}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{z\bar{h} + \bar{z}h - h\bar{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(z\frac{\bar{h}}{h} + \bar{z} - \bar{h}\right)$$

ここで、$h = re^{i\theta}$とおく

$$= \lim_{r\to 0}\left(z\frac{\cancel{r}e^{-i\theta}}{\cancel{r}e^{i\theta}} + \bar{z} - \cancel{re^{-i\theta}}\right)$$

$$= \lim_{r \to 0} \left(z e^{-2i\theta} + \bar{z} + \cancel{r} e^{-i\theta} \right)$$

$$= z e^{-2i\theta} + \bar{z} \quad 」$$

これは、一意ではない。（θによって、極限値がかわる）

→ $\boxed{f(z) \,(= z\bar{z})\ \text{は微分不可能.}}$

“実関数と複素関数との大きな違い。”

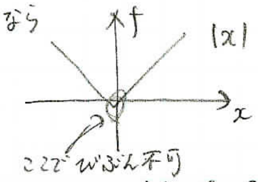
(注)　$z = x + iy$ とおくと.

$$f(z) = f(x+iy) = |x+iy|^2 = x^2 + y^2$$ ← 滑らかな関数

けれども、微分不可

直感に反する.

実なら



複素

x^2 と y^2 は

いたるところなめらか

→ But　びぶん不可

つまり、複素関数は、なめらかでも微分不可能になりえる。

例題

(1)　$f(z) = \bar{z}$ が微分不可能であることを示せ.

$f(z) = x - iy$ は、明らかになめらかだが.....

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{r \to 0} \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

一意に定まらない

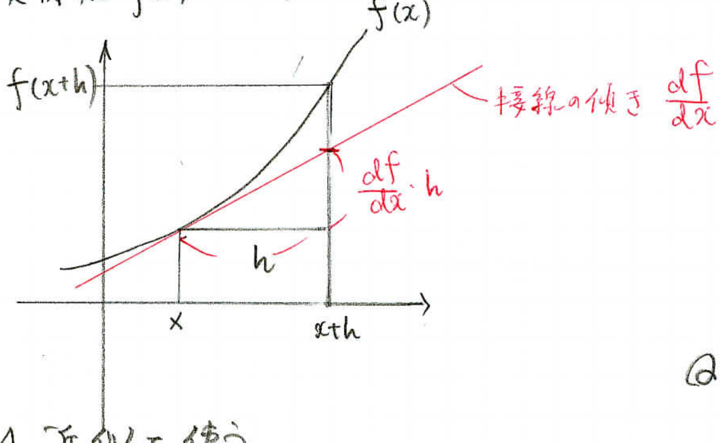
よって、微分不可

疑問：どういう関数が微分可能なのか？

→ Cauchy-Riemann の関係式
コーシー・リーマン

● 復習

実関数 $f(x)$ の微分



$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ となる

Q. $f(x+h)$ の具体的な形は？

A. 近似を使う

$$f(x+h) = f(x) + \frac{df}{dx}\cdot h + O(h^2)$$

"近似の概念"

$h\to 0$ で消える項
（誤差）

このアイデアを複素関数に用いたい

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

実2変数の場合に適用

1年生で学んだ……
実2変数関数 $f(x,y)$ について、

$$f(x+h_1,\ y+h_2) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}h_2 + O(h_1,h_2)$$

のちに、u, v

▷ 複素微分可能性の条件

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$ とおく.

ここで、z を $h = h_1 + ih_2$ だけずらす.

つまり、

$$x \to x + h_1$$
$$y \to y + h_2$$
とする.

すると、

$$f(z+h) = f(x+iy+h_1+ih_2)$$

$$= u(x+h_1, y+h_2) + iv(x+h_1, y+h_2)$$ ← ここに近似式

$$= u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x} h_1 + \frac{\partial u}{\partial y} h_2$$
$$+ i\left[v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x} h_1 + \frac{\partial v}{\partial y} h_2\right] + o(h_1, h_2)$$

$$= \underbrace{u + iv}_{f(z)} + \underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}}_{\alpha\ \text{とおく.}} h_1 + \underbrace{\boxed{\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)}}_{\beta\ \text{とおく.}} h_2 + o(h_1, h_2)$$

定義にもどって.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha h_1 + \beta h_2}{h}$$

ここで、$h = h_1 + ih_2$ だったので、　$h_1, h_2 \in \mathbb{R}$

$$h_1 = \frac{h + \bar{h}}{2} \qquad h_2 = \frac{h - \bar{h}}{2i}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{\alpha \frac{h+\bar{h}}{2} + \beta \frac{h - \bar{h}}{2i}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\frac{\bar{h}}{h} + \frac{\beta}{2i} - \frac{\beta}{2i}\frac{\bar{h}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i}\right)\frac{\bar{h}}{h}\right\}$$

この項があると微分不可になるので、この項がゼロになればよい

ゆえに $\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2i} = 0$ なら 微分可能 になる!!

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2i}=0 \iff \boxed{\alpha+i\beta=0}$$

α, β を代入すると、

$$\iff \left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$\iff \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\iff \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}+i\left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}\right)=0$$

定理

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ と表わしたとき、

$f(z)$ が微分可能である必要十分条件は、

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

である。(Cauchy-Riemannの関係式)

例題　次の関数について C-R 関係式をつかって微分可能性を判定せよ.

(1) $f(z)=z^2$

$$f(z)=f(x+iy)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy.$$

$$\therefore \begin{cases} u(x,y)=x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=2x-2x=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=2y+(-2y)=0$$

微分条件は求まった。

次に、$\dfrac{df(z)}{dz}$ はどうなるか？

← 極限値

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \beta = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2i} = \frac{\alpha}{2}-\frac{i\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

ここで、C-R 関係式より

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

代入

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{i}{2}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}f(x+iy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}f(z)$$

定理

$$\boxed{\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}f(x+iy)}$$

例　$f(z)=z^2$ の微分形を求める。

$$f(z) = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) = 2x+2iy = 2z$$

(注)

$$\frac{df(z)}{dz} = -i\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy)$$ でも 微分形が求まる.

Q).

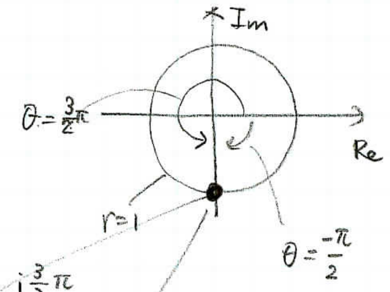
$f(z)$ は. C-R 関係式が満たされれば 微分可能

→ C-R 関係式は 厳しい関係式に見える.

→ どのぐらい 多くの $f(z)$ が 微分可能 なのだろうか?

レポート問題の実は....

$\sqrt{-i} = ?$

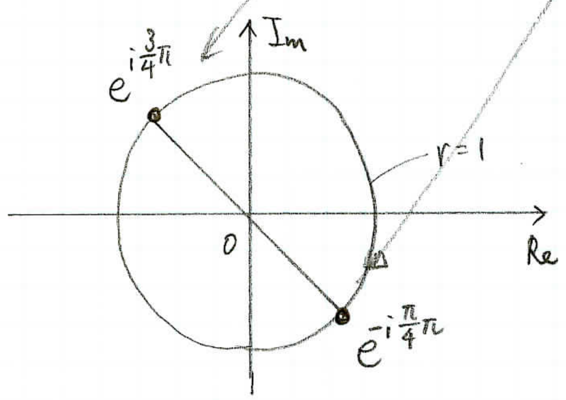


$$\begin{cases} i = e^{i\frac{3}{2}\pi} \\ i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

どちらも同じだが、$\sqrt{\ }$ を考えると

$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{i\frac{3}{2}\pi}} = e^{i\frac{3}{4}\pi}$

$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{-i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

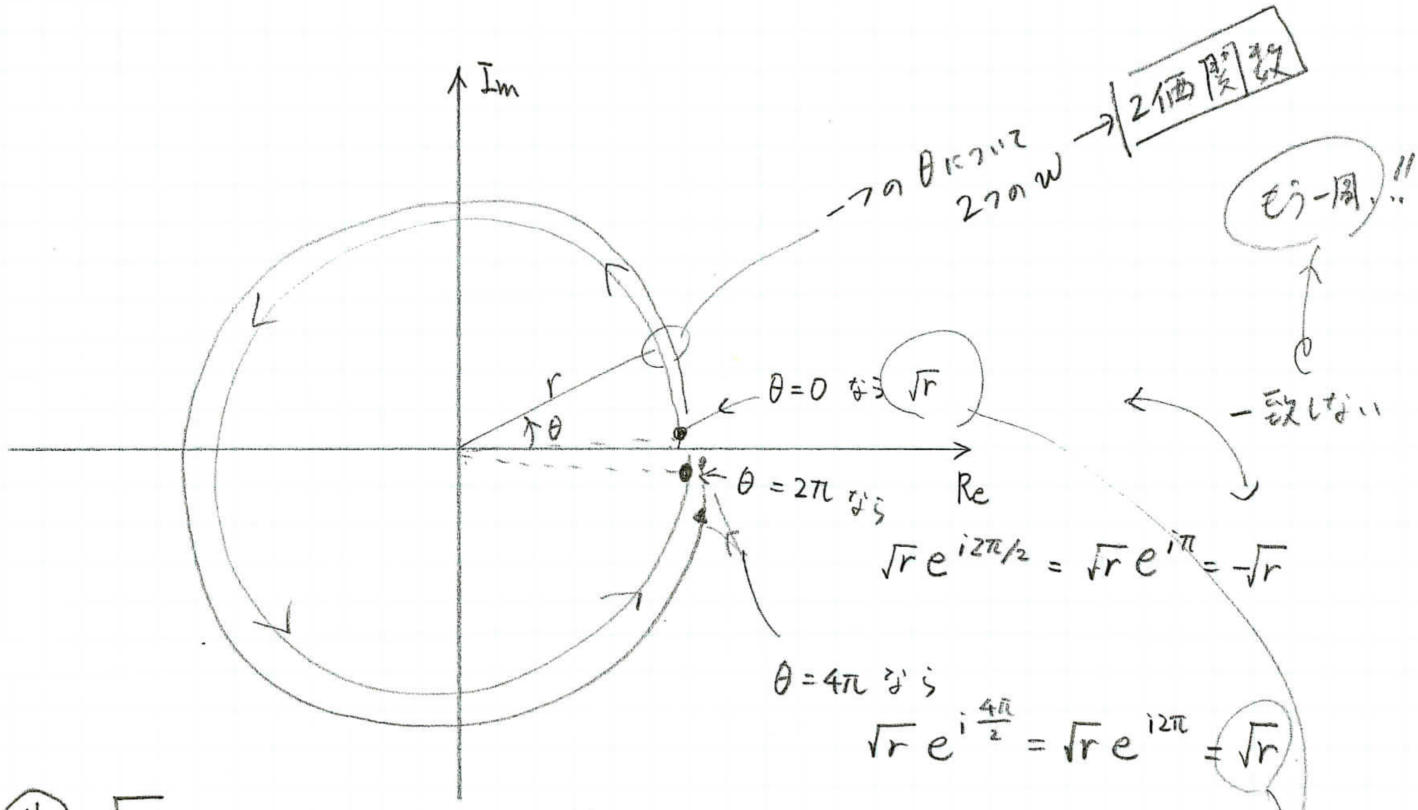


2つの点になる!!

Why??

$w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ ← $0 \le \theta \le 2\pi$ では、元に戻らない。

$z = re^{i\theta}$



$\sqrt{r}\,e^{i2\pi/2} = \sqrt{r}\,e^{i\pi} = -\sqrt{r}$

$\sqrt{r}\,e^{i\frac{4\pi}{2}} = \sqrt{r}\,e^{i2\pi} = \sqrt{r}$

!! $\sqrt{z}$ は、$0 \le \theta \le 4\pi$ の範囲を考える必要がある

$\sqrt[3]{z}$ なら $0 \leq \theta \leq 6\pi$ ← 3価関数

$\sqrt[n]{z}$ なら $0 \leq \theta \leq 2n\pi$ ← n価 〃

($n \in I$)

多価関数

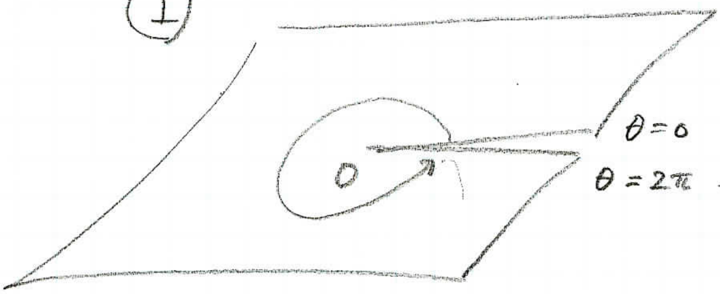
$\boxed{w=\sqrt{z}}$

一つの θ について、2つの w がある。

→ 一枚の複素平面じゃかけない → どうする

→ 2枚用意する。

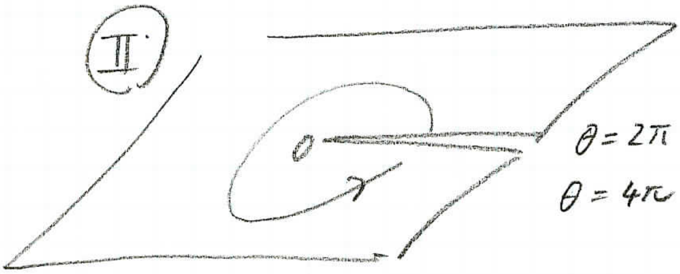
Ⅰ



$\theta=0$

$\theta=2\pi$ → Ⅱ の $\theta=2\pi$ へ行く。

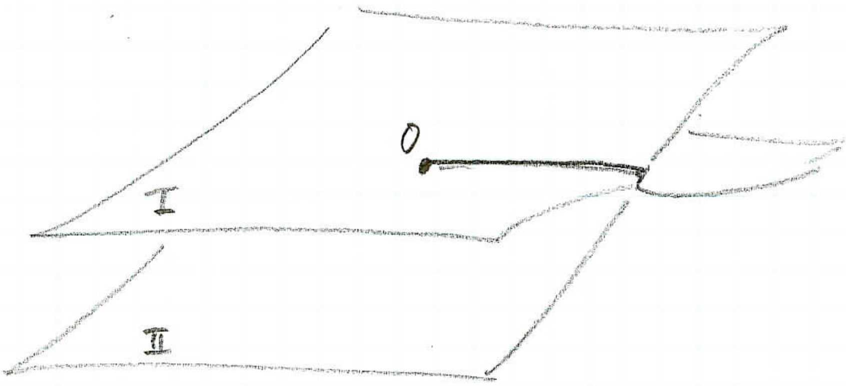
Ⅱ



$\theta=2\pi$

$\theta=4\pi$ → Ⅰ の $\theta=0$ に戻る。

あわせると、



Riemann 面

という