物理数学Ⅲ

偏微分方程式，〜 固有値問題.

量子力学の数学的基礎. 技法に修得に向けて.

微分方程式 $\Longleftrightarrow$ 物理現象の記述

▷ 力学

運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \qquad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \vec{F} = -\underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{grad}} V(r)$$

$r = |\vec{r}|$

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\underbrace{\vec{\nabla}\overbrace{V(r)}^{\text{スカラー}}}_{\text{ベクトル}}$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\dfrac{\partial}{\partial x}V(r) \\ m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -\dfrac{\partial}{\partial y}V(\vec{r}) \\ m\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = -\dfrac{\partial}{\partial z}V(\vec{r}) \end{cases}$$

特に一次元の系なら

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{d}{dx}V(x) = F(x).$$

$\boxed{\text{2階}}$の$\boxed{\text{常}}$微分方程式

▷ 電磁気学

Maxwell 方程式

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho & \text{ガウスの法則の微分形} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 & \\
\vec{\nabla}\times\vec{H} - \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} & \text{アンペールの法則　ビオサバールの微分形} \\
\vec{\nabla}\times\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \text{ファラデーの電磁誘導の法則}
\end{cases}
$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

電荷保存則

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial t} = 0$$

特に静電場

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(r) \\ \vec{\nabla}\vec{E} = \dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

代入

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

$\rho(r) = 0$ 電荷がないとき、

$$\vec{\nabla}^2\phi(r) = 0$$

ラプラス方程式

$\vec{r} = (x, y, z)$

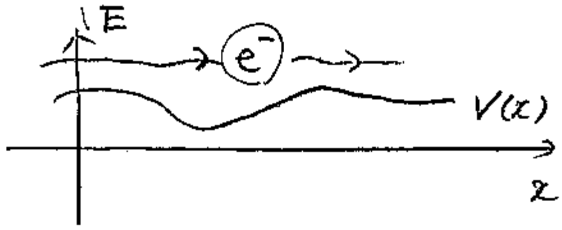
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z) = 0$$

$\boxed{2階}$の$\boxed{偏}$微分方程式

▷ 量子力学

1次元 ポテンシャル $V(x)$ 上を運動する粒子の波動関数 $\psi(x,t)$



$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right\}\psi(x,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)$$

$\boxed{2\text{階}}$の$\boxed{\text{偏}}$微分方程式

3次元なら、

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,y,z)\right\}\Psi(x,y,z,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,y,z,t)$$

特に 定常状態 $\Psi(x,y,z,t)=e^{-i\omega t}\phi(x,y,z)$ では、

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,y,z)\right\}\phi(x,y,z)=\underset{\substack{\| \\ E}}{\boxed{\hbar\omega}}\,\phi(x,y,z)$$

エネルギー固有値。

古典的には

実は、$\boxed{\text{波動方程式}}$ と 全く同じ

一見違う物理現象が、全く別の現象や分野で使われている方程式に帰着される

物理数学III ～（偏）微分方程式と量子力学～

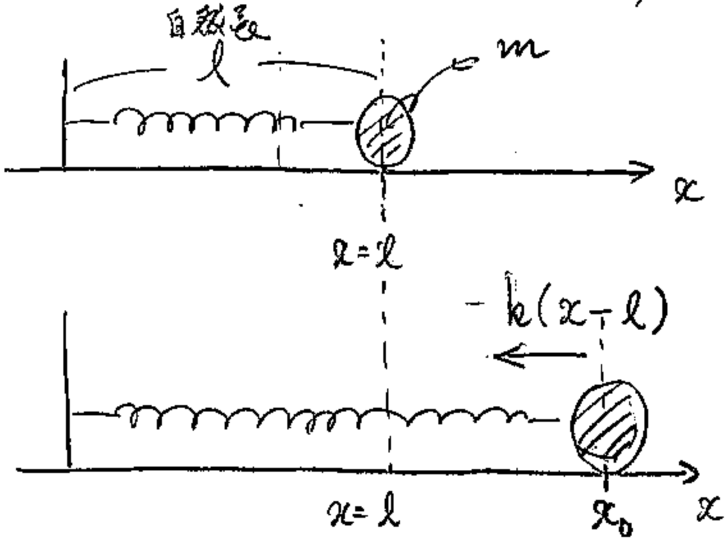
＝固有値問題

§0. 何故 微分方程式 か？

↕

物理現象の記述

力学（単振動＝調和振動子）



$t=0$ で $x=x_0$ に引っぱり離す

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k(x(t)-\ell)$$

おもりの座標 x は 時刻 t の関数

ニュートンの運動方程式は $x(t)$ についての

2階の常微分方程式.

$x(t) = Ae^{\lambda t} + l$ とおくと、

λについての特性方程式

$m\cancel{A}\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -k\cancel{A}\cancel{e^{\lambda t}} \iff \boxed{m\lambda^2 = -k}$

$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \pm i\omega$

$x(t)$ は、$\boxed{e^{+i\omega t}}$ と $\boxed{e^{-i\omega t}}$ という互いに独立な

2つの基本解をもつ。

$x(t)$ の一般解 $\iff$ 基本解の線形結合

$x(t) - l = Ae^{+i\omega t} + Be^{-i\omega t}$

A, B は任意の係数で、初期条件によって決する。

$$\Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \qquad v(0) = \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

初期条件

$x(0) = A + B + l = x_0$

$v = \dot{x}(t) = i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega Be^{-i\omega t}$

$v(0) = 0$ より

$0 = i\omega A - i\omega B \Rightarrow A - B = 0$

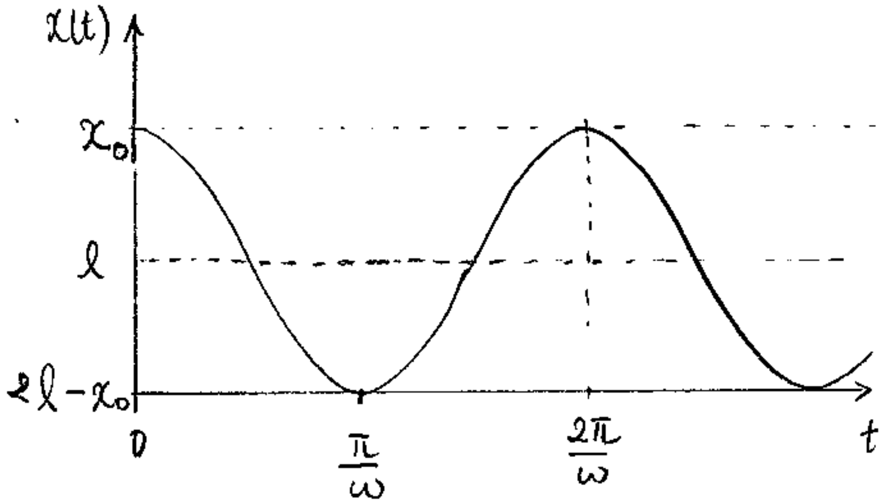
$$\boxed{A = B = \frac{x_0 - l}{2}}$$

まとめると、

$$x(t) = \frac{x_0 - l}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) + l$$

$$\boxed{x(t) = (x_0 - l)\cos\omega t + l} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

特解 又は 特殊解とよぶ



周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$