5.4.1　電磁気学で習う

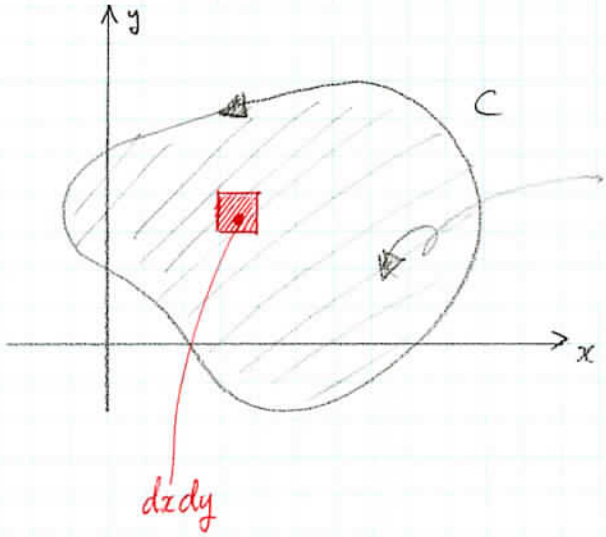
グリーンの公式　<=>　ストークスの定理の2次元版.

$P = P(x, y)$ , $Q = Q(x, y)$

を閉じた経路Cに沿って周回積分すると次の公式をえる.

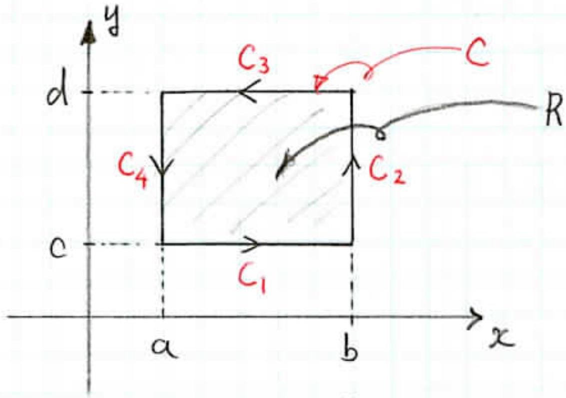
$$\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy .$$

線積分　　面積分




Cに囲まれた領域R

(略証)　Cとして、長方形の経路を考える。




$$\oint_C P(x,y)dx = \sum_{j=1}^{4} \int_{C_j} P\,dx$$

$$= \int_{C_1} P(x,y)\frac{dx}{dt}dt + \cancel{\int_{C_2} P\frac{dx}{dt}dt}^{\,0} + \int_{C_3} P\frac{dx}{dt}dt + \cancel{\int_{C_4} P\frac{dx}{dt}dt}^{\,0}$$

$\left(\because \frac{dx}{dt}=0\right)$　　$\left(\because \frac{dx}{dt}=0\right)$

$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=c \\ t: a\to b \end{cases}$　$\begin{cases} x(t)=b \\ y(t)=t \\ t: c\to d \end{cases}$　$\begin{cases} x(t)=t \\ y(t)=d \\ t: b\to a \end{cases}$　$\begin{cases} x(t)=a \\ y(t)=t \\ t: d\to c \end{cases}$

$$= \int_a^b P(t,c)dt + \int_b^a P(t,d)dt$$

$$= -\int_a^b \left[P(t,d) - P(t,c)\right]dt$$

$$= -\int_a^b \left[P(t,s)\right]_c^d dt$$

新しい変数

$$= -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(t,s)}{\partial s} ds\,dt$$

$$= -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx\,dy$$

$$= -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy \quad \text{——①}$$

同様に　$\oint_C Q(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy$ ——②

①+② より　グリーンの定理が成り立つ　//

## §4.2. コーシーの積分定理

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \oint_C (u\,dx - v\,dy) + i\oint_C (v\,dx + u\,dy)$$

$$= \iint_R \Big(\underbrace{-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}\Big)dx\,dy + i\iint_R \Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}\Big)dx\,dy$$

C-R関係式

$$= 0$$

---

**定理. コーシーの積分定理**

$f(z)$ が領域 $D$ で正則のとき、$D$ の内部にある任意の閉曲線 $C$ について

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

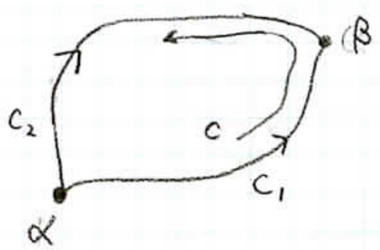
となる.

---

Cの内部に特異点がない単連結領域を囲む経路ならどんな形でもよい

## №32 正則な関数の積分について

(1) 経路によらない




コーシーの積分定理より

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

$$\oint_c f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz + \int_{c_2^{-1}} f(z)\,dz$$

$$= \int_{c_1} f(z)\,dz - \int_{c_2} f(z)\,dz = 0$$

$$\therefore \int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz$$

(2) 不定積分

経路によらないから、始点 α と終点 β で積分が決まる

また、$f(z)$ の不定積分 $F(z)$ が求まったら、ただちに積分は、

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$\left( \frac{d}{dz}F(z) = f(z) \right)$$

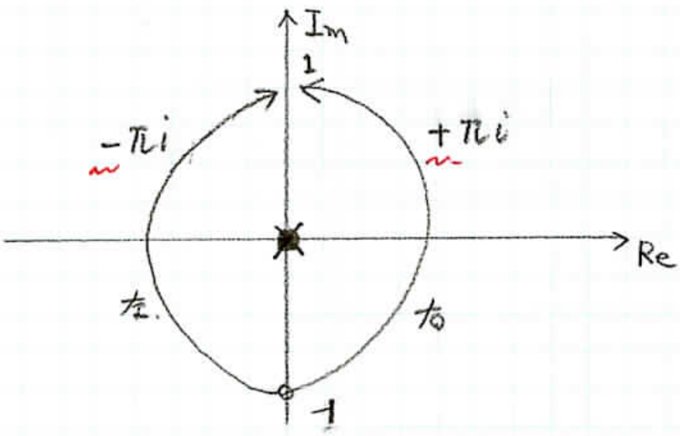
として、求まる.

複素平面上の全ての点（無限遠点を除く）で正則な関数については、実関数と同じように微分と積分が可能

たとえば、 $z^n$ 　$n$: 正の整数
$\sin z$, $\cos z$ 　　など

しかし、$\frac{1}{z}$ など 特異点を含む関数や 多価関数など
切断を含む関数には 適用できない

後述するが、
例えば $f(z)=\dfrac{1}{z}$ は $z=0$ に特異点をもつ。




積分経路によって
結果が異なる。

始点 $-i$，終点 $+i$ で同一であっても、Re$>0$ の領域を回わって積分するときと、Re$<0$ の領域を回わって積分するときでは、結果は異なる。

注意

したがって、被積分関数 $f(z)$ の素性が完全に分からない場合は、不定積分を使った積分はしない方がよい。